数学课程大总结

Summary of Mathematics Course

LC N$\underline{\text{o}}$ 0132

NC 非商业使用

Log Creative

数学课程大总结

终版　2017 年 8 月 24 日

编者： Log Creative

讲师： （按文档的先后顺序）

丁益祥	许老师	陈老师	曹瑞彬
陈永高	苏　淳	陈传理	宋立功
叶中豪	花老师	陈　计	卞老师
林老师	等		

表 统计信息

部分	编辑时间	字数	字符数
“平台”上的火花,2016.2	733 分钟	4670	5957
2016 暑期课程总结,2016.8	3061 分钟	10149	17445
2017 新增总结,2017.8	**6437 分钟**	**22949**	**45068**
本作总计	10231 分钟	38739	70256

谨以此作

纪念曾经一同奋斗的

张耀华(2001-2021) 同学

写在前面

今日，本作终告完成。

对以前的课程进行整理，是数学竞赛复习中重要的一环。这样，就能串起所有的知识，保持清晰的知识体系。当然，这个过程是漫长而复杂的。

结合着已经看过的书籍，我对课程中的许多部分作了注解，这样能够让课程与书籍形成一个有机的整体。并加深自己对书籍中一些知识的印象。

之所以使用电脑打稿，是因为尽管编辑时间会大大加长，但是可以给我更多的思考空间，让我尽可能地联想到更多的东西。在每个公式、每个图像的编辑过程中，我养成了严谨、认真的习惯。

10000 分钟的坚守，我还体会到了许多东西。

我体会到了著书者的辛苦，体会到了他们的字斟句酌，体会到了他们对数学的热爱，体会到了他们对读者的负责。体会到了他们思维的清晰，体会到了他们苦中作乐的心情。

有一个同学说过，尽管数学竞赛中的很多内容在大学中并不一定会用上，但是这个过程中所养成的自学能力是在许多地方得不到的。尽管现在有许多的高级计算机，能够通过穷举表明许多东西，但是最终的证明还是要靠人来完成的，这里面需要的是智慧，需要的是创新。需要的是对科学探索的勇气与力量，需要的是耐心的计算与等待。

灵机一动或许不靠谱，但是确是数学竞赛中考察的内容之一，也是现代数学研究所需要的。这需要的不仅仅是知识，还有经验与方法。

数学的精妙，没有耐心的打磨，是看不到的。我所做的只是加强真理之间的联系，把它们结合在一起，闪耀出更大的光芒!

Log Creative

2017 年 8 月 24 日

目 录

数学课程大总结

Log Creative (LC)No.0132

数学讲座（I）

(2016.1) 丁益祥 (2016.5)

1.函数

- **关于函数$f(x)=\log_a x-a^x$的零点个数。**
  结论： **(a)$a>1$**

$$\begin{cases} 0\text{个，} & 1<a<\sqrt{2}, \\ 1\text{个，} & a \doteq \sqrt{2}, \\ 2\text{个，} & a>\sqrt{2}. \end{cases}$$

  (b)$0<a<1$

  1 个或 3 个。

- **关于$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C+\sin B\sin C$的求值问题。**
  考察余弦定理:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

  使用正弦定理变形:

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$$

  当$\cos A=-\frac{1}{2}$时，即$A=\frac{2\pi}{3}$时，即是$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C+\sin B\sin C$。

  所以可以通过构造顶角为 120°的三角形解决问题。

- **关于$a^n+\frac{1}{a^n}$用$a+\frac{1}{a}$表示。**（讲课时提到了$a^2+\frac{1}{a^2}$的表示）

  事实上，对任何正整数 n，都可以用$a+\frac{1}{a}$来表示$a^n+\frac{1}{a^n}$:

$$a^n+\frac{1}{a^n}=P_n\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

  在这里，多项式P_n与所谓的切比雪夫多项式C_n有关。确切地说，有$C_n(x)=\frac{1}{2}P_n(2x)$，而切比雪夫多项式的定义是

$$\cos nx=C_n(\cosh x)$$

  注意，此处的$\cosh x$表示双曲余弦函数，$\cosh x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$。

  (《模拟试题精选》编委会, 2017, p. 60)
  简单的例子:

$$\boldsymbol{a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2}$$

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$a^5+\frac{1}{a^5}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^5-5\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+10\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

实际应用时，可直接展开$\left(a+\frac{1}{a}\right)^n$把里面的$a^k+\frac{1}{a^k}(k<n)$用已知的形式表示。

- **函数方程，求$f(x)$。**

  1.待定、换元、配方、消参数。

  2.赋值、解方程。

  3.叠加（乘）、观察法、柯西方程*。

  特别地，赋值针对三种题型：二元函数、抽象函数、不会做的题。

- **值域的求解。**

1.观察法	2.二次函数法	3.分离常数法
4.判别式法	5.换元法	6.图像法
7.单调性	8.反函数	9.求导数

- **关于函数$f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$。** $f(x)+f(1-x)=1$

丁益祥的部分

- **取值范围**

  只要求取值范围，（大部分）就是不等关系。

  具有参数时，不妨设值，画出轮廓后再进行变化。

- **求值问题**

  一般是方程问题。

- **函数-方程-不等式**

  式的运算是基础，数可视为式的特例，方程是关键，函数是核心。(朱华伟、程汉波, 2016, p. 192)

- **函数思想**

  认知特性是：

  （1）整体性，把思考对象始终看作一个有机联系的整体，或一个完整的过程来认识。

  （2）变动性，动态而静止地看问题。

  （3）关联性，用互相联系、互相制约、互相转化而非孤立的观点看问题。

  显然，函数思想是客观辩证法在人脑中的反映，是辩证思维在数学中的具体体现。(朱华伟、程汉波, 2016, p. 193)

- **高斯函数的解题策略**

  把目标区间拆分成长度小于 1 的一个个小区间求解。

- **重要的习惯**

  概念的清晰性、数学形式化（Mathematical symbolization）、数学语言的交流（Communication of mathematical language）、符号语言与文字语言的变换；

  坚持通性通法，淡化特殊技巧、分类讨论、复杂的分解；

  体会定义题的含义、代数式的配凑技巧。

2.几何

- **辅助线**

  1.选中点　　2.作垂线　　3.选线平行

- **口诀**

  中点 中线 中位线 平行线 延长线
  垂线 角分线 翻转全等连
  边边若相等 旋转做试验

3.数列

- **一个体现对称美的数列裂项放缩**

  求证:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{m^3}} < 3$$

分析与证：对称美，运算简！

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{\sqrt{m^3}} < \sum \frac{1}{\sqrt{m(m^2-1)}} &= \sum \frac{1}{\sqrt{(m-1)m(m+1)}} \\ &= \sum \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}} \\ &= \sum \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right) \cdot \frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1}}{2} \\ &< \sum \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2m}{2}} \\ &= \sum \left(\frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 3\end{aligned}$$

数学讲座（II）

许老师 (2016.1)

- **好题标准**

  给好学生以展示空间，给差学生以留出活路。

- **好的习惯**

  结束考试前 5 分钟，检查区间的开闭。

- **函数的研究**

  1.定义域　　2.值域　　3.单调性
  4.奇偶性　　5.周期性　　6.对称轴
  7.零点

数学讲座（III）

陈老师 (2016.1)　林老师 (2017.8)

□ 研究函数：用研究的心态学习

课改标准要求之一即是："创造性地使用自己所学的知识"。

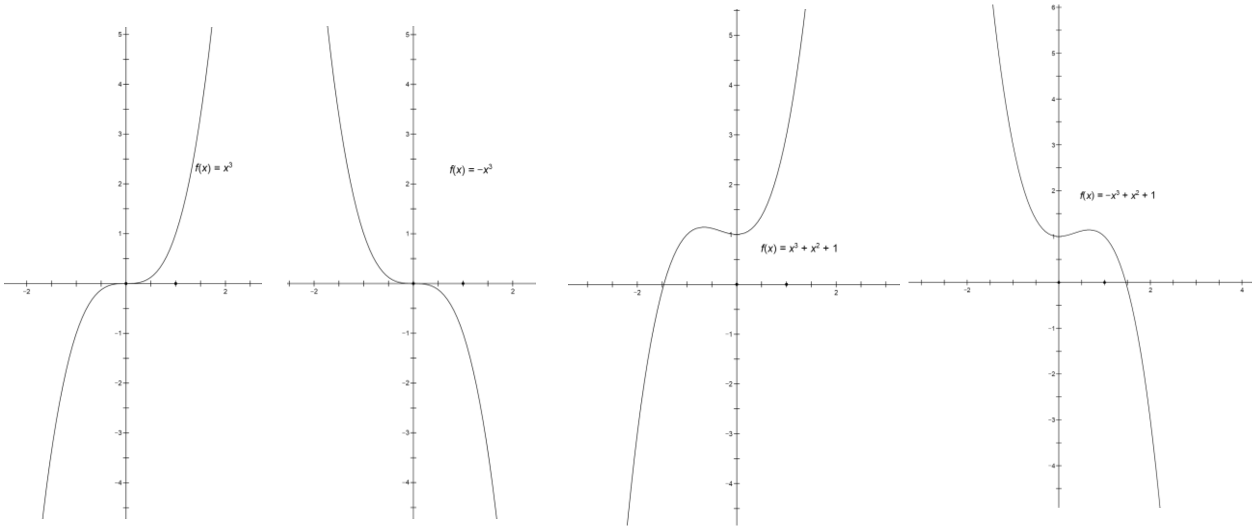
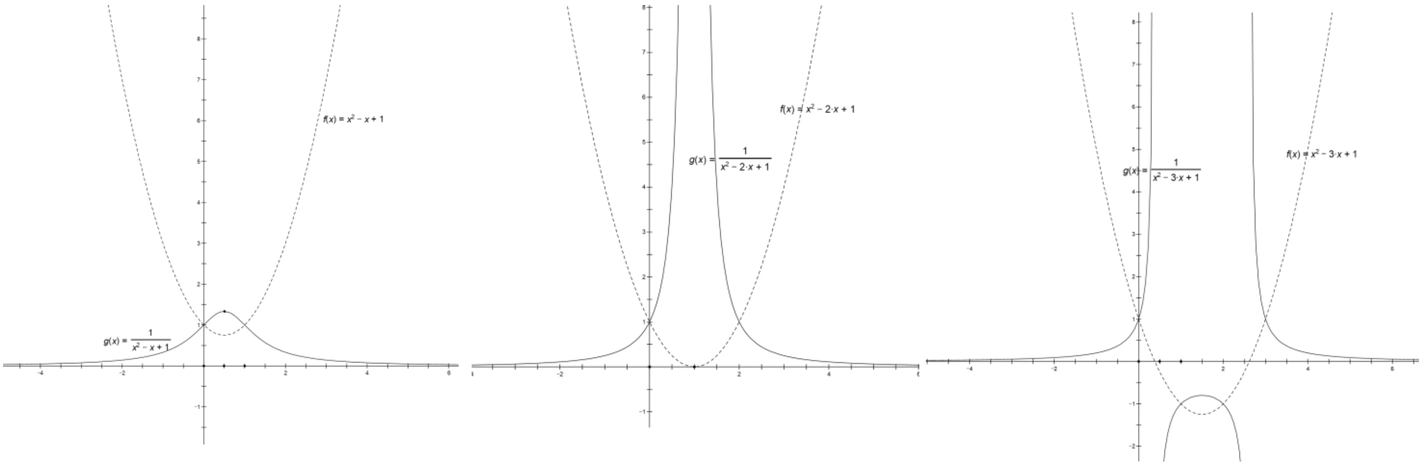


图 2 三次函数图像类型



(i)$\Delta < 0$　　(ii)$\Delta = 0$　　(iii)$\Delta > 0$

图 3 函数$f(x)$（虚线）与$\frac{1}{f(x)}$（实线），$f(x) = ax^2 + bx + c$

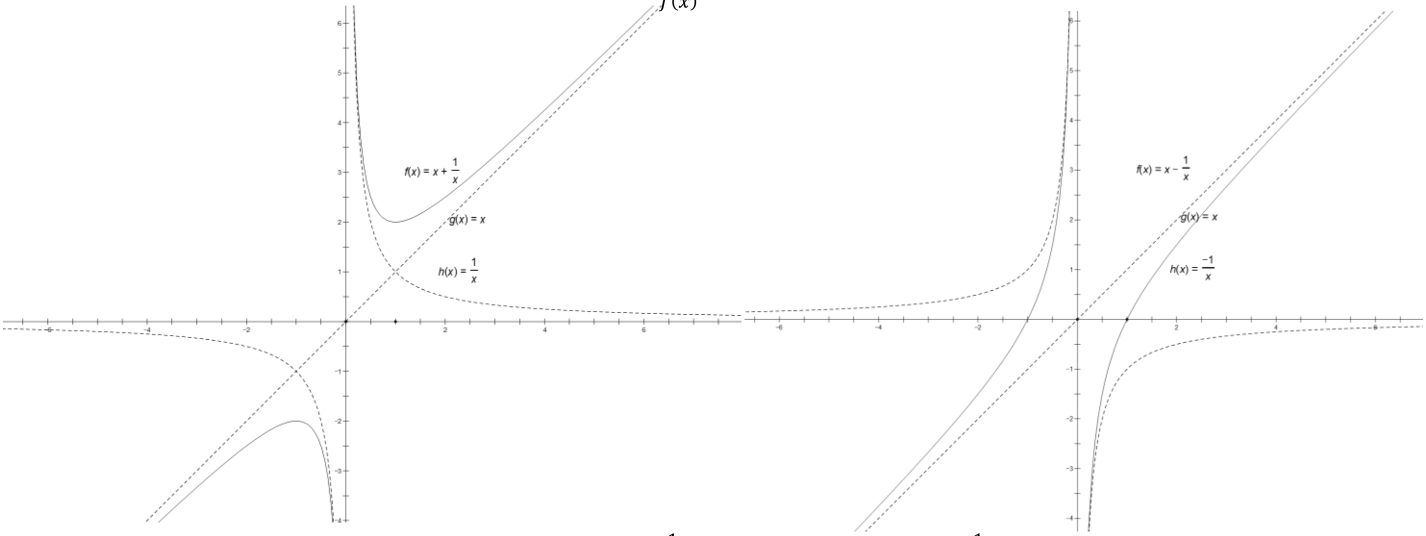


图 1 对勾函数$f(x) = x + \frac{1}{x}$（左）与函数$f(x) = x - \frac{1}{x}$（右）

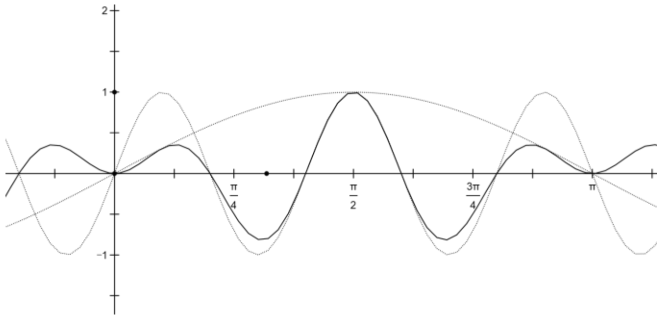


图 4 函数$f(x) = \sin x * \sin 5x$(清华自招)

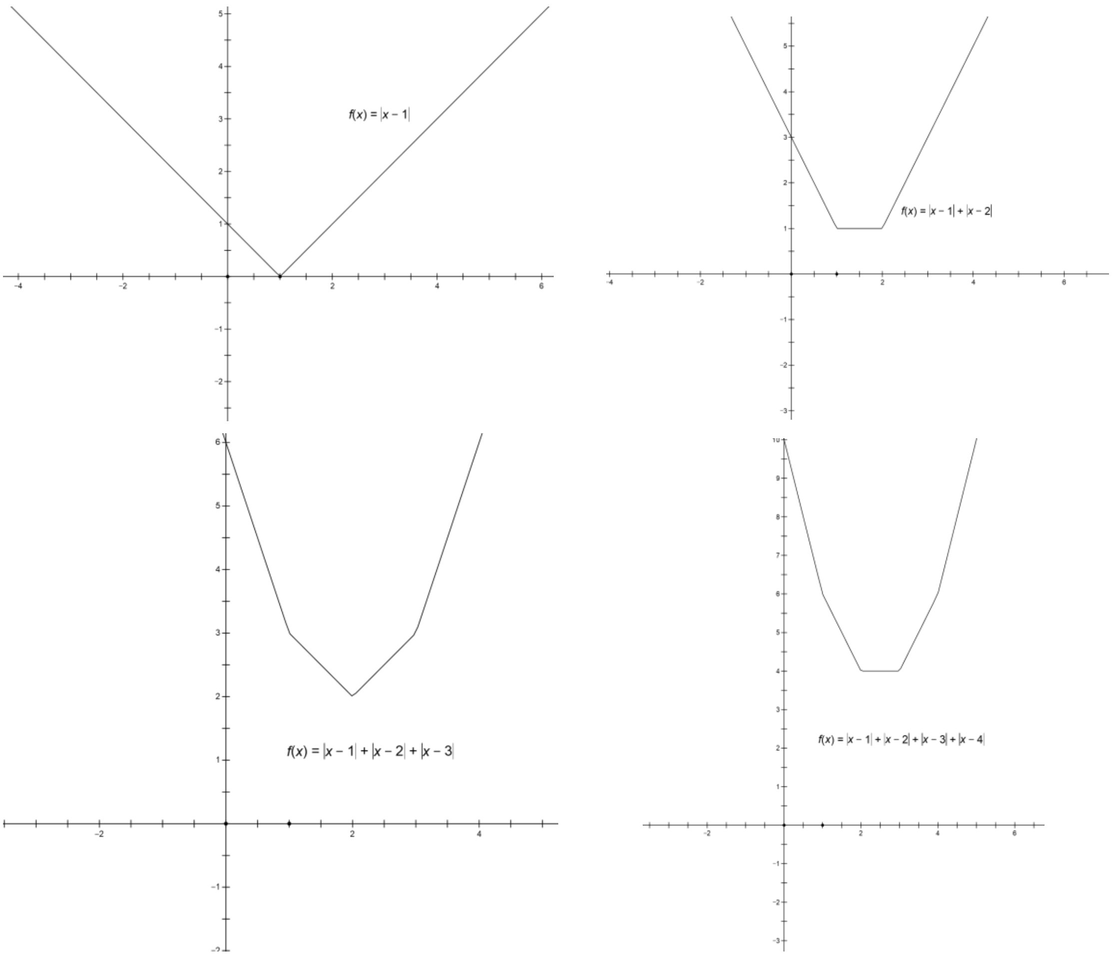


图 5 绝对值函数$f(x) = \sum |x - a_i|$

特征：1.开口向上　　　　2.两端斜率为$\pm n$

3.最小值

$$f_{min}(x) = f(a_i\text{的中位数}) = \begin{cases} f\left(a_{\frac{n+1}{2}}\right), n\text{为奇数} \\ f\left(a_{\frac{n}{2}}\right), f\left(a_{\frac{n}{2}+1}\right), \ n\text{为偶数} \end{cases}$$

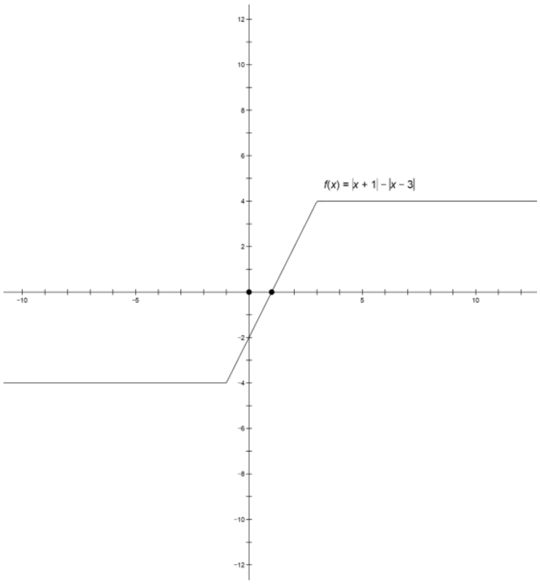


图 6 $f(x)=|x+1|-|x-3|$图像

- **柯西方程**

$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的严格单调函数，且对任意的 x，$y\in\mathbf{R}$，有

$$\boldsymbol{f(x+y)=f(x)+f(y)\to f(x)=kx}$$

$$\begin{matrix} f(xy)=f(x)*f(y) \\ f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)} \end{matrix}\to f(x)=x^{\alpha}\text{或}f(x)=a^{x}$$

$$\begin{matrix} f(xy)=f(x)+f(y) \\ f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y) \end{matrix}\to f(x)=\log_a x$$

$$f(x+T)=f(x)\to\text{有周期}$$

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)*f(y)}\to f(x)=\tan x$$

$$f(x+y)=\frac{f(x)f(y)-1}{f(x)+f(y)}\to f(x)=\cot x$$

证明：$\boldsymbol{f(x+y)=f(x)+f(y)}$——柯西方法（基础类型）

0：令$x=y=0$，得$f(0)=0$。

奇：令$y=-x$，得$f(x)+f(-x)=0,f(-x)=-f(x)$，故$f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数。

N：容易证明$\forall n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$，有$f(nx)=nf(x)$。

Q：对于非负有理数x，可设$x=\frac{m}{n}(m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}_+$，则$nf(x)=f(nx)=f(m)=f(m\times1)=mf(1)$,即$f(x)=f(1)x$，记$f(1)=k$，则$f(x)=kx$。当$x$为负有理数时，$-x$为正有理数，故有$f(x)=-f(-x)=-k(-x)=kx$。这就是说，当$x$为有理数时，均有$f(x)=kx$。

R：对于无理数x，我们取x的不足近似有理数列$\{r_n\}$与过剩近似有理数列$\{s_n\}$，它们都收敛(converge)到x，且$r_n\le x\le s_n$，由于$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上严格单调，故$k\neq0$，不妨设$k>0$，则不等式$kr_n=f(r_n)\le f(x)\le f(s_n)=ks_n$成立，令$n\to\infty$，亦有$f(x)=kx$。

综上所述，$\forall x \in \mathbb{R}$，总有$f(x) = kx(k \neq 0)$，即$f(x)$为正比例函数。

(朱华伟、程汉波, 2016, p. 45)

值得一提的是，后面的类型均可由此导出。在此略。

- **万能公式**

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

可以用下面的图示快速记忆：

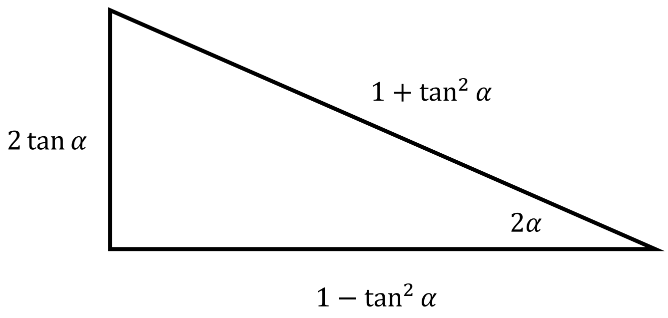


图 7 万能公式的记忆

（例）求所有满足

$$\tan A + \tan B + \tan C \leq [\tan A] + [\tan B] + [\tan C]$$

的三角形内角A, B, C。其中$[x]$为 Guass 函数（又称取整函数，表示不超过x的最大整数）。

解：根据 Guass 函数的定义：

$$\begin{cases} \tan A \geq [\tan A] \\ \tan B \geq [\tan B] \\ \tan C \geq [\tan C] \end{cases} \Longrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq [\tan A] + [\tan B] + [\tan C]$$

故

$$\tan A + \tan B + \tan C = [\tan A] + [\tan B] + [\tan C]$$

所以

$$\tan A, \tan B, \tan C \in \mathbb{Z}$$

由于A, B, C是三角形内角，故

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A * \tan B * \tan C \quad (*)$$

不妨设

$$\tan A \leq \tan B \leq \tan C$$

（i）若$\tan A < 0$，则$\tan B, \tan C > 0$。（三角形中只能有一个钝角）

对(*)式变形得

$$\tan B + \tan C = \tan A * (\tan B * \tan C - 1)$$

$$\Longrightarrow \tan B * \tan C - 1 < 0 \Longrightarrow \tan B * \tan C < 1 \Longrightarrow \min\{\tan B, \tan C\} < 1$$

这与$\tan B, \tan C \geq 1$是矛盾的。

（ii）若$\tan A > 0$，则$\tan B, \tan C > 0$。

$\Longrightarrow 0 < A \leq \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \tan A = 1 \in (0, \sqrt{3}]$

则$1 + \tan B + \tan C = \tan B * \tan C$

（法一）变形为$\tan B * \tan C - \tan B - \tan C = 1$

$\Longrightarrow \tan B(\tan C - 1) - (\tan C - 1) = 2 \Longrightarrow (\tan B - 1)(\tan C - 1) = 1 \times 2$

故$\tan B = 2, \tan C = 3.$

（法二）变形为

$$\tan B = \frac{\tan C + 1}{\tan C - 1} = 1 + \frac{2}{\tan C - 1} \in \mathbb{N}$$

故$\tan C - 1 = 1\ or\ 2, \tan C = 2\ or\ 3$

但$\tan C = 2$时，$\tan B = 3$，这与$\tan B \leq \tan C$矛盾。

综上所述，$\tan A = 1, \tan B = 2, \tan C = 3.$

这一题是一道好题，它使用了数论的知识与方法，并注意到了三角正切的恒等式。后面的讨论耐人寻味，是数论讨论中的范例。

其中关于$\tan A$的正负讨论是值得学习的。

◻ 三角换元的想法

三角恒等式:

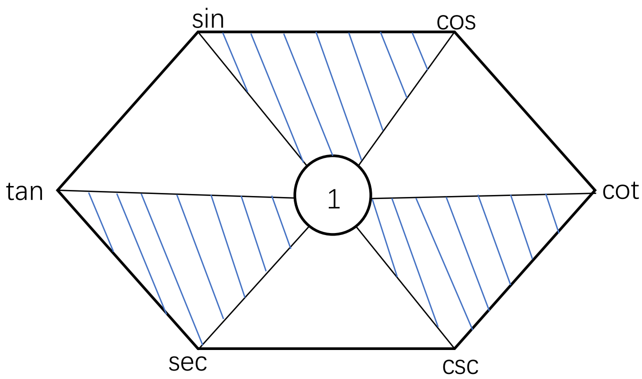


图 8 三角函数

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$	$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$
$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha$	$\cot \alpha = \cos \alpha \times \csc \alpha$	等
$\sin \alpha \times \csc \alpha = 1$	$\cos \alpha \times \sec \alpha = 1$	$\tan \alpha \times \cot \alpha = 1$

类型:

I.换元

①$\sqrt{1 - x^2}, x = \cos \alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi, \rightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha$

②$\sqrt{4 - x^2}, x = 2\cos \alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi, \rightarrow |2\sin \alpha| = 2\sin \alpha$

③$\sqrt{1 + x^2}, x = \tan \alpha, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \rightarrow |\sec \alpha| = \sec \alpha$

④$\sqrt{4 + x^2}, x = 2\tan \alpha, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \rightarrow |2\sec \alpha| = 2\sec \alpha$

⑤$\sqrt{x^2 - 1}, x = \sec \alpha, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \rightarrow |\tan \alpha| = \tan \alpha$

⑥$\sqrt{x^2-4}, x=2\sec\alpha, -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}, \to |2\tan\alpha| = 2\tan\alpha$

⑦ $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}, \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\tan\alpha, \to$ $\frac{\sqrt{3}}{2}|\sec\alpha|$

II.恒等变换

$$x+y+z=xyz \to \sum\tan A = \prod\tan A \text{ or } \sum\cot\frac{A}{2} = \prod\cot\frac{A}{2}$$

$$xy+yz+zx=1 \to \sum\cot A\cot B = 1 \text{ or } \sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$$

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1 \to \sum\cos^2 A + 2\prod\cos A = 1$$

以下是三角形中其他的一些恒等式：

$$\sum\sin A = 4\prod\cos\frac{A}{2} \qquad \sum\cos A = 1+4\prod\sin\frac{A}{2}$$

$$\sum\sin^2 A = 2+2\prod\cos A \qquad \sum\cos^2 A = 1-2\prod\cos A$$

$$\sum\sin^2\frac{A}{2} = 1-2\prod\sin\frac{A}{2} \qquad \sum\cos^2\frac{A}{2} = 2+2\prod\sin\frac{A}{2}$$

- **向量的极化公式**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right]$$

(例)(向量、复数一家亲!)对于复数α,β，定义$(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}(|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2)$，定义$\langle\alpha,\beta\rangle = (\alpha,\beta)+\mathrm{i}(\alpha,\mathrm{i}\beta)$。

(1) 求证：$\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle$为实数；

(2) 试将$\langle\alpha,\beta\rangle$的模用$\alpha,\beta$表示。

(《模拟试题精选》编委会, 2017, p. 109)

(1) **证明**：

$$\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle = 2(\alpha,\beta)+\frac{\mathrm{i}}{4}(|\alpha+\mathrm{i}\beta|^2-|\alpha-\mathrm{i}\beta|^2+|\beta+\mathrm{i}\alpha|^2-|\beta-\mathrm{i}\alpha|^2)$$

由于$|\alpha+\mathrm{i}\beta| = |\mathrm{i}(-\alpha\mathrm{i}+\beta)| = |\beta-\alpha\mathrm{i}|$,同理，$|\alpha-\mathrm{i}\beta| = |\beta+\mathrm{i}\alpha|$。或通过下面的图示表示：

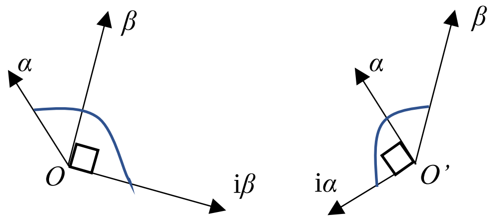


图 9 $|\alpha+\mathrm{i}\beta| = |\beta-\alpha\mathrm{i}|$

所以，$\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle = 2(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$。

(2) **解**:对于求模的题目，平方才能继续!

$$
\begin{aligned}
|\langle\alpha,\beta\rangle|^2 &= \left(\frac{1}{4}(|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2)\right)^2+\left(\frac{1}{4}(|\alpha+\mathrm{i}\beta|^2-|\alpha-\mathrm{i}\beta|^2)\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}(|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2)\right)^2+\left(\frac{1}{4}(|\alpha+\mathrm{i}\beta|^2-|\beta-\alpha\mathrm{i}|^2)\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}\left[\left((\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})-(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})\right)^2\right. \\
&\quad \left.+\left((\alpha+\mathrm{i}\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\mathrm{i}}\bar{\beta})-(\beta-\alpha\mathrm{i})(\bar{\beta}-\bar{\alpha}\bar{\mathrm{i}})\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[\left(2(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)\right)^2+\left(2\mathrm{i}(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)\right)^2\right]=\frac{1}{16}\cdot 16\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}=|\alpha|^2|\beta|^2
\end{aligned}
$$

所以

$$|\langle\alpha,\beta\rangle|=|\alpha|\cdot|\beta|$$

注意：$\alpha^2\neq\bar{\alpha}^2, |\alpha|^2=\alpha\bar{\alpha}$.

“平台”上的火花[1]

1.“平台”思想

当学习《数学 必修3》的《算法初步》一节中，我们学习了“算法初步”思想。书中通过几个例题，表明一些程序的算法具有一般性，这时，我们就可以把这样的算法做成一个“程序包”，又称为一个“平台”，在需要时，把程序包拿出来使用即可 (Anon., 无日期)，这就是**平台(platform)**思想。

后面又说到，“平台”的思想在算法设计中是一个最基本的思想，也是数学中思考问题的一个重要思想。

或许当时感悟不深。但是，仔细思考一下，“平台”思想就在我们身边。比如，小学的“鸡兔同笼”问题，初中的“解三角形”问题，高中的“数列”问题，以及在做一张的 PPT[2] 时，使用模板将会非常省力，而且美观。例子举不完。这意味着，几乎所有的问题都是由一个个小“平台”解决的。

但是或许还是无法感悟到“最重要”这一点。在数学题目中，有些时候，一道难题很长时间没有解出来。但是经过讲解，就会恍然大悟，“哦，还能这样解，这不是学过的吗？”

到目前为止，我们学过很多这样的大平台，而在这上面有着一些“工具”，你知道吗？

2.图象[3]——“具象化”的工具

从开始研究函数开始，我们就知道要描述一个函数，可以使用列表法、解析式（表达式）法和图象法。从此，研究一个函数，**图象(graph)**成为了其重要的一部分。

在后来解决一些问题时，也就用到了“图象”这个工具。比如，在解决二次函数在某一区间内是否有解（零点）的问题时，很大一部分就是通过做出二次函数图象，来直观地观察满足的条件（比如两端点值与 0 的关系、对称轴等），而不是去凭空记忆怎样解决，而且这样也记不住嘛。

通过上面这个例子，能够更好地理解“具象化”的含义。所谓具象化，就是把抽象的东西，表现得很具体。简单地说，就是把看不见的、不容易理解的，变得看得见、容易理解 (米汤屹砚 iR, 2014)。我认为，图象就有这个功能。

实际上，“图象”就是一个平台。但是对于一些复杂的问题或是较难的问题，你是否真的有意识、或者是有敏锐观察，看到这里应使用这个平台吗？

【例 1】（2014 浙江高考）设函数 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=2(x-x^2)$，$f_3(x)=\frac{1}{3}|\sin 2\pi x|$，$a_i=\frac{i}{99}$ $(i=0,1,2,\cdots,99)$，记 $I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|+\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$，$k=1,2,3$，则（　　）

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_2<I_1<I_3$　　C. $I_1<I_3<I_2$　　D. $I_3<I_2<I_1$

看到这一题之后，是否感觉无从下手？有些同学就无奈地使用直接计算的方式，如当 $k=1$ 时，

---

[1] Log Creative，(LC)No.0072，2016 年 2 月 21 日 第 7 版

[2] PPT，全称 PowerPoint，即幻灯片。

[3] 图象中的“象”字，根据“图象(graph)是图形，图像(picture)是画面”，以及教科书上的字，故本论文中使用“象”来特指理科中的图象。

$$\left|f_1\left(\frac{i}{99}\right)-f_2\left(\frac{i-1}{99}\right)\right|=\left|\left(\frac{i}{99}\right)^2-\left(\frac{i-1}{99}\right)^2\right|=\frac{1}{99}\times\frac{2i-1}{99}$$

$$I_1=\frac{1}{99}\left(\frac{1}{99}+\frac{3}{99}+\cdots+\frac{2\times 99-1}{99}\right)=1$$

是可以算出来的。

但是有这个必要吗？如果此时脑子里突然有一个映射：绝对值→距离→图象，用图象具象化表示，是不是更好呢？尝试一下，如图 1，作出 $y=x^2$ 的图象，取 a_0,a_1,a_2，发现左端 y 轴上 $I_1=|f_1(a_1)-f_1(a_0)|+|f_1(a_2)-f_1(a_1)|+\cdots+|f_1(a_{99})-f_1(a_{98})|=1$！

看到成果后，就继续探索，如图 2，作出 $y=f_2(x)$的图象。

类似地，$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{49},a_{50}$ 怎么办？我们通过图象很直观地就看出 a_{49},a_{50} 是关于对称轴对称的点，所以 $f_2(a_{49})=f_2(a_{50})<\frac{1}{2}$，所以易得 $I_2<1$。

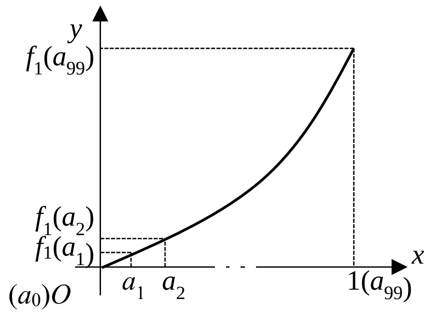


图 10 f_1的图象

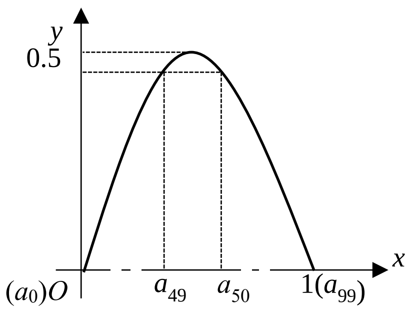


图 2 f_2的图象

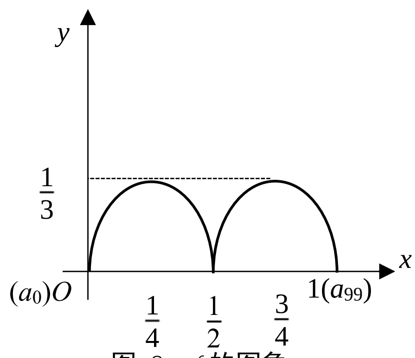


图 3 f_3的图象

如图 3，作出 $y=f_3(x)$的图象。类似地，可得 $I_3<\frac{4}{3}$。但是这样依然无法比较大小。但是再仔细看看图象，很容易得到 $I_3>1$。因为转折处的损耗不可能大于等于$\frac{1}{3}$。

综上，$I_2<I_1<I_3$，故选 B。

这一题还包含着许多其他的“平台”思想，如微积分的思想，这意味着“平台”之间有时是有一定联系的。

但是我们依然能够清楚地看到，这些思想在图象的“平台”上摩擦出了明亮的火花，最终创造出了数学灵感。

图象的确是一个具象化工具，这个工具就在那，就看你会不会使用它。

【例 2】（2015 清华自主招生）设 $f(x)=\sin x\sin 5x$，若 $f(x)=a$ 在$[0,\pi)$上有唯一解，则 $a=$_________。

有点犯难了，这个 $f_1(x)=\sin x$ 的图象我会，$f_2(x)=\sin 5x$ 的图象我也会，为什么一相乘就不会了呢？

既然已经想到了在区间内有解→图象交点，为什么不继续作出图象呢？

如图 4，在同一坐标系内画出 $y=f_1(x)$和 $y=f_2(x)$的图象。但是在作图过程中，你是否意识到“五点作图法”了？

没错，$f(x)=\sin x\sin 5x$ 就可以采用这个方式作出来。选择 $f_2(x)$的“五点”，通过乘积的方式描出这些点，并把这些点大致用曲线连接起来，图象就出来了。

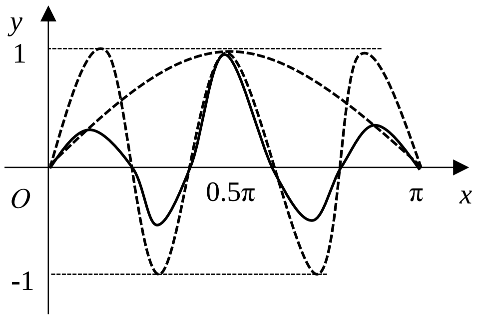


图 11　$y=f_1(x)$、$y=f_2(x)$、$y=f(x)$的图象（示意）

显然 $a=1$ 就是我们想要的结果。

这些已经研究过的图象确实为研究新函数图象提供了很大的便利。人们总喜欢直观的感觉，而二维的图象比一维的代数直观地多。

3.三角函数和向量——“自然化”工具

说到三角函数，就知道曾经用了大量的时间和精力去研究三角函数，研究了这个函数的性质、诱导公式、辅助角公式。更有甚者，了解了万能公式，以及其他的特殊规律。但是却只是止步于平面几何的基础运算和代数的基本技巧。一旦有所隐藏，就不敢下手了。

【例 3】已知 $a+b+c=1$，求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3}$。

说 1 是个有趣的东西：1 可以拆分为两个因式（和为 1）的乘积，拯救了这个题目于水深火热之中；1 又可以变为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，通过三角函数这个工具去解决。可以说“1”是个“无中生有”的工具。

那么再看这个题目。如果使用不等式去解决，技巧性就比较高了。但是 1→三角换元，为什么不试试啊？

那么就又会遇到瓶颈：两个元我好换，这里有三个元……

令 $a=\cos^2\alpha$，$b+c=\sin^2\alpha$，$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$。整体代换是不错，下面怎么办？

为了出现$\sqrt{b}+\sqrt{c}$，再代换一次，$b=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta$，$c=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$，$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$。

这就妙极了！

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\leqslant\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\sin(\alpha+\theta)$$

$$\leqslant\sqrt{3}$$

$\left(\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 证毕。

在这一过程中，是不是在遇到瓶颈的时候，失去了对这个平台的“信任”，导致最终不再使用工具，徒手劳动？实际上，这就是信念不够坚定导致的。而“平台”思想在一定角度上就是解题的大纲，灵感的指路标，避免使用“摸索”的方式匍匐前进。所以，在遇到这个“平台”映射的时候，就应该勇敢地用工具去探索。

类似地，我们又认识了“向量”这个工具。它也可以很自然地解决一些初中平面几何

问题。就比如下面这一题。

【例 4】如图 5，在△ABC 中，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$AD$ 与 BC 交于点 M，$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$x-y=$_____。

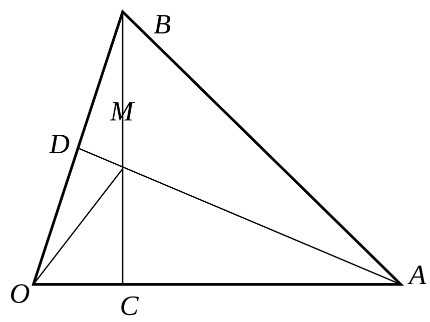


图 12　例 4 的题图

解法一（所谓初中方法）：根据梅涅劳斯定理[4]可得，

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{AC}}\times\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}}\times\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DO}}=1$$

代入数据，解得

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{3}{4}=\lambda$$

根据定比分点[5]可得，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OC}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}=\frac{4}{7}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$$

即

$$x-y=-\frac{2}{7}$$

解法二（三点共线方法）：取$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。则$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$。

因为 A,M,D 和 B,M,C 分别三点共线。根据三点共线的推论，所以

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OD}=\alpha\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(1-\alpha)\boldsymbol{b}\\ \overrightarrow{OM}=\beta\overrightarrow{OB}+(1-\beta)\overrightarrow{OC}=\beta\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}(1-\beta)\boldsymbol{a}\end{cases}$$

即

---

[4] **梅涅劳斯（Menelaus）定理**（简称梅氏定理）：任何一条直线截三角形的各边，都使得三条不相邻线段之积等于另外三条线段之积。或者是：当直线交△ABC 三边所在直线 BC,AC,AB 于点 D,E,F 时，

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

(百度百科, 2016)

[5] **定比分点（Definite proportion）**：l 上两点 P、O，它们的坐标分别为$(x_1, y_1),(x_2, y_2)$，在直线 l 上一个不同于 P，O 的任一点 M 使$\frac{PM}{MO}$ 等于已知常数 λ。即$\frac{PM}{MO}=\lambda$，我们就把 M 叫做有向线段 PO 的定比分点。若设 M 的坐标为(x, y)，则 $M(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1},\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1})$。(百度百科, 2016)

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{4}(1-\beta)\\ \beta=\dfrac{1}{2}(1-\alpha)\end{cases}$$

解出 α，β，易得相同的结果。

实际上，不论是解法一还是解法二，他们都是建立于已知“平台”或者说是“定理”的基础上的，做题的困难性不分上下。而且他们都对应着大“平台”，一个是平面几何，一个是向量，你可以使用大“平台”中的任意内容，但是能否做对取决于你对“平台”的熟悉程度以及使用“工具”的熟练程度。

4.数列——“规律化”工具

还记得小学时候的“按规律填空”吗？没错，从那时起，就认识了“数列”。

在高中的时候，深入地对等差数列和等比数列进行研究。

只是有时候就忘记这个“工具”了。

【例 5】已知函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，且同时满足：①$f(1)=3$，②$f(x)\geqslant 2$ 恒成立，③若 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$，则有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)-2$。

试比较$f\left(\frac{1}{2^n}\right)$与$\frac{1}{2^n}+2$的大小（$n\in\mathbf{N}$）。

合理地对题干中的关系赋值，成为第一关键。

令$x_1=x_2=\frac{1}{2^{n+1}}$，$n\in\mathbf{N}$。可得，$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$，所以

$$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)-2\Rightarrow f\left(\frac{1}{2^n}\right)\geqslant 2f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2 \qquad ①$$

那么，下面应如何找到与$\frac{1}{2^n}+2$的关系呢？

$n\in\mathbf{N}\to$数列$\to a_n\geqslant 2a_{n+1}-2\to$构造类等比数列！

$$①\Rightarrow f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2\leqslant\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2^n}\right)-2\right]\Rightarrow$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2}{f\left(\frac{1}{2^n}\right)-2}\leq\frac{1}{2}$$

累乘法对于等比数列可起到类似于消除一元的作用。所以

$$\frac{f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2}{f\left(\frac{1}{2^n}\right)-2}\times\frac{f\left(\frac{1}{2^n}\right)-2}{f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)-2}\times\cdots\times\frac{f\left(\frac{1}{2^1}\right)-2}{f\left(\frac{1}{2^0}\right)-2}\leq\frac{1}{2}$$

即

$$\frac{f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2}{f(1)-2}\leq\frac{1}{2}$$

即

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\leq\frac{1}{2^{n+1}}+2$$

即

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n} + 2$$

很清楚地看到，这里的函数就变成了数列，这种“数列化”的思想，或者是运用数列这个“规律化”工具，对于这样的题目往往是非常有用的。

再次地，体现了这种“跨平台”的思想。这意味着越是有创新的题目，越是有着整合多个平台的意味，有些时候需要深入探索一番。

5.“平台”思想的应用

通过上面的过程，我们认识了这几个老工具的新特性：“具象化”工具、“自然化”工具、“规律化”工具。但是，重新审视这个过程，或许会有更深的感悟。

- **基本型“平台”思想的应用**

平常遇到同类型的题，可以使用已经熟悉的“平台”进行套用。这类似于“复制—粘贴”过程。在这样的情况下，“平台”意识很强烈。

- **“平台”思想的应用过程**

反观这些过程，我们是如何想到思路的？

图 13 利用“平台”思想的连环映射

这意味着，要想激发数学灵感的火花，“反应”这个过程很关键。而需要触发这个反应，就必须在脑子里提前储存一些映射。而这些映射所要储存的信息，就是“特征→反应”。

我认为，在储存这些信息的过程中，就在培养着**“平台”意识**。一旦有所储存，就能对所识别到的特征进行判断与反应。

实际上，要想识别到特征，就应在审题过程中保持有着“平台”意识。这是比较关键的。

综上所述，这个过程就是这样的：

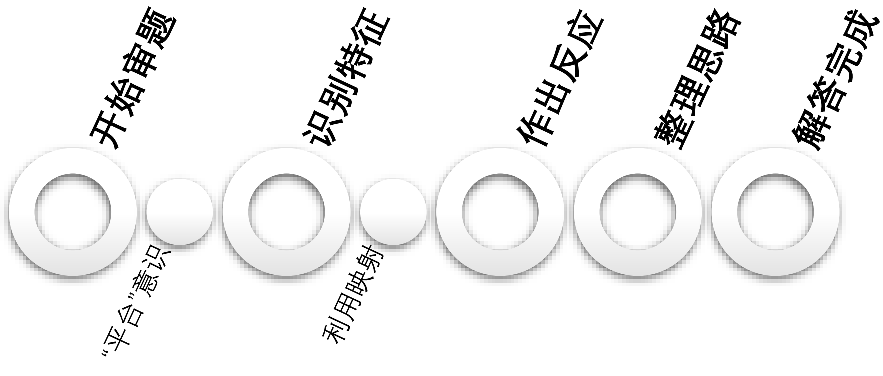


图 14 利用“平台”思想解题的完整过程

- **“平台”与“工具”**

这里所说的“工具”与“平台”的关系是什么？

正如前面所述，“平台”包含着“工具”。解决问题时，可使用数学感觉，推理解出答案。但在使用“平台”思想解决问题时，需要用上面的“工具”来转换，使其与已经存储的“抽象化”解答过程相匹配，即抽出其骨髓，然后使用映射，再复原，从这个“抽象化”过程再“具体化”至具体的题目上，从而成功运用这个“平台”解决这个问题。

因此“工具”也是一种转化的“平台”。

图 15　工具的作用

这一过程可以参考**【例 5】**。

- **创新型“平台”思想的应用**

了解了以上的问题，就来看看面对难题的解决方法。

（1）复杂的题目。复杂的题目解决方法是多“平台”的组合，这对应着“复杂 = 简单 + 简单 +…+ 简单”。所以，在解决时，要仔细解剖，识别特征，作出反应。

（2）“跨平台”的题目。对于“跨平台”的题目，就必须强化识别“平台”之间相似点。通过另一个平台的解决方法，来解决这个问题。实际上，这样的题目，“平台”是具有包含关系的。这意味着，跨平台的过程中，是从“大平台”跨向“小平台”，或者是从“小平台”跨向“大平台”。正如**【例 5】**中，数列实际上是一种特殊的函数。你或许还遇到过其他的，如使用函数中的方法来解决三角函数中的问题（换三角函数为一个元）。

- **以大见小（适用于“跨平台”题目）**

在科学研究中，科学家常将未知现象同已知现象进行比较，找出其共同点，进一步推测未知现象的特征和规律。 (蔡晔, 2015.4)这就是类比推理的原理。而在这里也是如此。我们常将未知题目同已知平台进行比较，从而解答出这个题目。

6.探索更多的“平台”和“工具”

更多的“平台”和“工具”等待着去摸索与总结。我们所学到的“平台”和定理，都是前人所总结出来的。牛顿曾说过：“如果我比别人看得更远，那是因为我站在巨人的肩上。”那么就让我们在夜幕降临时，在巨人的肩膀上擦出火花！

7.结论

- “平台”思想对数学灵感的激发具有促进作用。
- 而为了使用“平台”思想，就必须在审题时具有“平台”意识。
- 而为了识别特征，就要提前存储一些映射和“工具”。
- 使用数学感觉或“工具”转换，启用映射，来进行下一步的反应过程。
- 在面对创新型题目时，就可以灵活使用“平台”思想解决问题。包括“平台”的组合与“跨平台”（“平台”的类比）。
- 因此，需要摸索与总结更多的“平台”与工具。

综合选讲[6]

曹瑞彬 (2016.7, 2017.7)

【知识】

△平面几何

1. 托勒密定理 *Ptolemy Theorem*

圆的内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积。

△代数

2. Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

特别地，$e^{i\pi} = -1$

3. z 是复数，$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

4. 泰勒展开式 *Taylor Expansion*

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

△数论

5. Euler 函数

Euler 函数$\varphi(a)$表示不超过 n 且与 n 互质的自然数的个数。

6. Euler 定理

令正整数 n 的标准分解为

$$\boldsymbol{n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdot \cdots \cdot p_m^{t_m}}$$

则

$$\boldsymbol{\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)}$$

证明 令集合$M = \{1,2,3,\cdots,n\}$，令集合$M_i = \{x|x \in M, \& \, p_i|x\}$。
此时集合M_i为整除p_i的数 x 的集合。

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \left|\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \cdots \cap \overline{M_m}\right| \\
&= |M| - \sum_{i}^{m}|M_i| + \sum_{1\le i<j\le m}\left|M_i \cap M_j\right| - \sum_{1\le i<j<k\le m}\left|M_i \cap M_j \cap M_k\right| \\
&\quad + \cdots + (-1)^m|M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \cdots \cap M_m| \\
&= n - \sum_{i=1}^{m}\frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le m}\frac{n}{p_i p_j} - \cdots + \frac{(-1)^m n}{\prod_{i=1}^{m} p_i} = n\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)
\end{aligned}$$

(容斥原理)

[6] Log Creative，(LC)No.0107，2016 年 8 月 11 日 最终版

7. 如果$a, a+1, a+2, \cdots, a+n-1$是 n 个连续整数，则

$$n! \left| \prod_{i=0}^{n-1}(a+i) \right.$$

8. $(a\,,b)=(a\,,ka+b)$

9. Euler 定理

设$\boldsymbol{a, m \in N^*, (a, m)=1}$，则$\boldsymbol{a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m)}$。

定义 对于 mod m，其余数$\{0,1,2,\cdots,m-1\}$是 m 的一个**完系**。其中与 m 互素的余数$\{x_1, x_2, \cdots, x_{\varphi(m)}\}$为其**简系**。

证明 取模 m 的一个简系：$x_1, x_2, \cdots, x_{\varphi(m)}$。取 a et. $(a, m)=1$。

得 $ax_1, ax_2, \cdots, ax_{\varphi(m)}$也是模 m 的一个简系。

则 $ax_1 \cdot ax_2 \cdot \cdots \cdot ax_{\varphi(m)} \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{\varphi(m)}\ (\mathrm{mod}\ m)$

则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m)$。

10. Fermat 小定理

如果 $\boldsymbol{p}$ 为素数，$\boldsymbol{(a, p)=1}$，则 $\boldsymbol{a^{p-1} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)}$。

引理 1 如果$ac \equiv bc\ (mod\ p)$，且 $(c, p)=1$，则$a \equiv b\ (mod\ p)$。

引理 2 如果$(a, p)=1$, p 为质数，则 $a, 2a, \cdots, ap$ 被 p 除的余数均不同。（采用反证法证明）

证明 $1 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$ ，$2 \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ p)$ ，⋯ ，$\mathrm{p}-1 \equiv \mathrm{p}-1\ (\mathrm{mod}\ p)$ ，取 a et.$(a\,,p)=1$，由引理 2 可得，

$a, 2a, \cdots, a(p-1)$ 被 p 除的余数均不同，为$\{1,2,\cdots,p-1\}$。

所以 式子两边相乘，得

$$1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \equiv a \cdot 2a \cdot \cdots \cdot (p-1)a\ (\mathrm{mod}\ p)$$

得 $a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)!\ (\mathrm{mod}\ p)$。

由于 $\big((p-1)!,\ p\big)=1$，所以 $a^{p-1} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$。

11. Wilson 定理

设 $\boldsymbol{p}$ 为素数，则$\boldsymbol{(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)}$。

证明 （i）当 $p=2$ 时， $1! \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，显然成立。

（ii）当 $p>2$ 时，（此时 p 显然为奇数）

令 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdot \cdots \cdot \big(x-(p-1)\big)-(x^{p-1}-1)$。

$f(x)$的最高次数是$p-2$。

另一方面， $(p, i)=1\ (i=1,2,\cdots \mathrm{p}-1)$,

所以 根据 Fermat 小定理，$i^{p-1} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$

即 $i^{p-1}-1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$。

所以 $f(i)=0$。

所以 对$\forall x \in Z, f(x) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$。

所以 $f(0) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$。

即 $(-1)^{p-1}(p-1)!+1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$

而 $p-1$ 必为偶数，所以 $(\mathrm{p}-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$。

【思想】

1.探索法——难题的敲门砖

1. 定义函数f: $\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+$，如下：

$f(1)=1$，$f(3)=3$ 且对$\forall n\in \mathbb{N}_+$，有

$$f(2n)=f(n),\qquad f(4n)=2f(2n+1)-f(n),\qquad f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$$

问有多少个$n\in\mathbb{N}_+(n\le 2016)$，使$f(n)=n$？

这一题，我们在《高中数学竞赛教程（中国科技大学出版社）》的《第 6 讲 记数法》也见到了本题，只是原条件为$n\le 1988$。但是解析一上来就不知道怎么想的。

现在跟随曹瑞彬老师的脚步，解决本题。

使用探索法的根本，对于与年份有关的数目，或者大到离谱的数目，都应从小数开始探索规律。

表格 1

n	**1**	*2*	**3**	*4*	**5**	6	**7**	*8*	**9**	10
***f*(*n*)**	**1**	*1*	**3**	*1*	**5**	3	**7**	*1*	**9**	5

在探索前 10 个数时，发现似乎奇数都是符合要求的，这时可能会很高兴。但是，教授说了一句话，如果继续探索呢？

表格 2

n	11	12	13	14	**15**	*16*	**17**	18	19	···
***f*(*n*)**	13	3	11	7	**15**	*1*	**17**	9	25	···

令人失望。只有 15 和 17 是符合要求的。如果仔细看一下，是不是还会有所发现呢？

我当时发现，所有 2 的整数幂左右都是符合要求的数。这时老师来了一句，”如果探索其二进制数呢？”

表格 3

n	**1**	*10*	**11**	*100*	**101**	110	**111**	*1000*	**1001**	1010
***f*(*n*)**	**1**	*01*	**11**	*001*	**101**	011	**111**	*0001*	**1001**	0101

奇妙的事情发生了，我们发现经过f变换后，其二进制码被倒过来了！

现在我们只需要证明：

$$若n=(a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0)_2,\qquad 则f(n)=(a_0 a_1\cdots a_{k-1}a_k)_2$$

老师在最后说到，“有人可能会问我，你是怎么想到的？”，他笑着说到，“老师是看解析得到的。”我想，那个关键的点——2 的整数次幂可能也是激发灵感的一点吧，毕竟，只要有强大一些的进制映射，就有很大的可能从此找到关键点。

“盼星星，盼月亮，朝思暮想的讲义终于来了！”

2. 对于给定的$m,n\in\mathbb{N}_+, a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$是 m 个给定的整数，且 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_m$,求证：

$$\exists T,\ |T|\le 1+\frac{(a_m-a_n)}{2n+1}\ \&\exists t\in T, s\in[-n,n]$$

Et. 对$\forall a_i(i=1,2,\cdots,n)$, $a_i=t+s$.

探索法，有时候也是通过特殊的情况（举例），来理解题意，明确目的。

现在不妨假设$m=5,n=3,a_1=-5,a_2=-2,a_3=0,a_4=5,a_5=8$。

$$|T|\le 1+\frac{8-(-5)}{2\times 3+1}=1+\frac{13}{7}\Rightarrow |T|\le 2$$

故令$T=\{b_1,b_2\}$, $t\in T$ 得 $S\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

故$b_1=-2$, $b_2=5$为正确的选择。

此时由b_1得到的范围是[-5,1]，b_2得到的范围是[2,8]。这也就表明，为使T能够最大可能性存在（使T元素个数最小，得到的数不重复）得到的范围应为

$$[\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}]$$

内的连续整数。

为了证明，需要更一般的情况。

一般地 由$|T|$的定义方法，我们**构造**

$$a_m-a_1=k(2n+1)+r,\qquad 0\le r<2n+1\ \&\ r\in\mathbb{N}_+$$

$|T|=1+k$

设 $T=\{b_1,b_2,\cdots,b_{k+1}\}$, $t\in T,s\in[-n,n],a_i=t+s$,

应使 $b_1-n=a_1\Rightarrow b_1=a_1+n$ $b_{k+1}+n=a_m\Rightarrow b_{k+1}=a_m-n$

取$b_1=a_1+n$得到 $a_1,a_1+1,\cdots,a_1+n,\cdots,a_1+2n$.

为了使得到的范围不重复，应取$b_2=a_1+n+2n+1$,得到$a_1+2n+1,a_1+2n+1,\cdots,a_1+4n+1$，我们终于得到：

$$b_i=a_1+n+(i-1)(2n+1)$$

现在可以开始证明了。

证明 设 $a_m-a_1=k(2n+1)+r$, $0\le r<2n+1\ \&\ r\in\mathbb{N}_+$

设 $T=\{a_1+n+i(2n+1),i=0,1,2,\cdots,k\}$。此时

$$|T|=1+k\le 1+\frac{(a_m-a_n)}{2n+1}$$

则 $s+t$表示从a_1至$a_1+n+k(2n+1)$的连续整数。

现在只要证明 $a_1+n+k(2n+1)\ge a_m$，

注意到，$a_m=a_1+k(2n+1)+r<a_1+k(2n+1)+2n+1$，得证。

“退一步，海阔天空。”

3. 设$f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},n\in\mathbb{N}_+$.求证：（1）当$n$为偶数时，方程$f_n(x)=0$没有实数根；（2）当$n$为奇数时，$f_n(x)=0$有唯一实数根。

不是一眼看出的题，就要用探索法。是一眼能看出的题，不是难题。可见探索法的重要性。

原题目如此之说，我们需要想到其成立情况。

当n为偶数时，方程$f_n(x)=0$没有实数根，只要证明此时$f_n(x)>0$或$f_n(x)<0$。

当n为奇数时，$f_n(x)=0$有唯一实数根，只要证明此时$f_n(x)$单调函数。

$$f_1(x)=1+x\quad f_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}>0$$

$$f_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\quad f_3'(x)=1+x+\frac{x^2}{2}=f_2(x)>0$$

$f_3(x)$是单调增函数。

是成立的！在此探索中，我们有了新发现：$\boldsymbol{f'_{n+1}(x)=f_n(x)}$。这可是一大关键！

故下面的思路就很清晰了，用**数学归纳法**证明：

$$f'_{2k-1}(x)>0 \quad f_{2k}(x)>0$$

复杂的题目实际上是由许多的简单点构成的，找到突破口，过关斩将，就能完成解答。

总言之，探索法就是发现题目特征的方法，寻找突破口的方法。从基础的地方开始研究，是有出路的。

2.反证法——山重水复前的出路

4. $f(x),g(x)$定义域为$[0,1]$。求证：

$$\exists x_1,x_2\in[0,1],\ et.|x_1x_2-f(x_1)-g(x_2)|\geq\frac{1}{4}$$

当题目所给的条件过于模糊，根本无从下手的时候，反证法往往是最好的选择。

证明 **若不然**，则 $\nexists x_1,x_2\in[0,1],\ et.|x_1x_2-f(x_1)-g(x_2)|\geq\frac{1}{4}$。

即 $\forall x_1,x_2\in[0,1],\ et.|x_1x_2-f(x_1)-g(x_2)|<\frac{1}{4}$。

反证法有一个好伙伴——赋值法，这个方法可以充分利用题目所给条件，**增加条件**，从而由**特殊值**导出的**矛盾**得证。

使用赋值法时，对于取值问题，还有一个很重要的技巧：**尝试取端点处值。**在此题中，由于$f(x),g(x)$是不同的函数，所以需要注意在对x_1,x_2取值时，进行一定的替换。

而端点值是 0 或 1，为导出矛盾，应使另一端为端点值之一。故我们尝试着去构造 4 个式子，使得其右端相加得 1。

(i) 当$x_1=x_2=0$时， $|f(0)+g(0)|<\frac{1}{4}$；

(ii) 当$x_1=1,x_2=0$时， $|f(1)+g(0)|<\frac{1}{4}$；

(iii) 当$x_1=0,x_2=1$时， $|f(0)+g(1)|<\frac{1}{4}$；

(iv) 当$x_1=x_2=1$时， $|1-f(1)-g(1)|<\frac{1}{4}$；

使用反证法的结果，就是得到与题设或公理、定理矛盾或自相矛盾的结论，从而否定最初的假设：**若不然。**从而证明原命题是正确的。这里，由于它们是未知的函数，不能与公理、定理相矛盾，故只能考虑得到**常数 A≠常数 A** 的结论。此时，就需要**消去$\boldsymbol{f(x)},\boldsymbol{g(x)}$这两个系列的元（未知数）**，这里即指$f(0),f(1),g(0),g(1)$这四个未知数。

以上的思考已经可以用于尝试了！

$$\begin{aligned}1=&|1-f(1)-g(1)+f(1)+g(0)+f(0)+g(1)-f(0)-g(0)|\\&\leq|1-f(1)-g(1)|+|f(0)+g(1)|+|f(1)+g(0)|\\&+|f(0)+g(0)|<\frac{1}{4}\times4=1\end{aligned}$$

(三角不等式：$\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$)

可以看到，通过增项，我们得到了一个奇妙的式子，而也正是这个式子连接已经由赋值得到的条件。最终得到了“1<1”胡扯的结果。

1<1，显然是错误的。 故得证。

5. $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$在$0\le x\le \frac{3}{2}\pi$上的最大值 M 与参数 A,B 有关，问：A,B 取什么值时，M 为最小？并证明你的结论。

证明 首先，化简这个式子

$$F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$$
$$=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$$

最特殊的情况，当$A=B=0$时，$M=\sqrt{2}$。

我们猜想，$M \geqslant \sqrt{2}$ 。为什么这么想呢？因为这太特殊了！它不需要对 x 讨论，另一方面，使 B 为正数或负数都会使**绝对值**的最大值变大。

在证明这样的不等式时，发现直接证简直无从下手。这时就可以证明其**补集是不可能的**。

若不然，则$\exists A,B,\ et.M<\sqrt{2}$。

在赋值的时候，有时需要取的是**具有代表性的点**，而非端点值，这时就要仔细观察题目的特征是什么。在本题，由于是取绝对值的最大值，故取

$$\begin{cases}\left|F\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|<\sqrt{2}\,; \\ \left|F\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right|<\sqrt{2}\,; \\ \left|F\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right|<\sqrt{2}\,.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left|\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B\right|<\sqrt{2}\,; \\ \left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|<\sqrt{2}\,; \\ \left|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B\right|<\sqrt{2}\,.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\sqrt{2}<\frac{\pi}{8}A+B<0 \quad (1); \\ 0<\frac{5\pi}{8}A+B<2\sqrt{2} \quad (2); \\ -2\sqrt{2}<\frac{9\pi}{8}A+B<0 \quad (3).\end{cases}$$

此时，我们需要找到矛盾。我们尝试把结构相似的式子叠加。

(1) + (3) 得， $-4\sqrt{2}<\frac{10\pi}{8}A+2B<0$ 即 $-2\sqrt{2}<\frac{5\pi}{8}A+2B<0$ (4)

(2)与(4)矛盾！

所以 $M \geqslant \sqrt{2}$ 。

这种方法巧在**运用特征**：$\boldsymbol{\frac{5\pi}{8}}$**是**$\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$**与**$\boldsymbol{\frac{9\pi}{8}}$**的中点**，叠加后必然得到与(2)式结构相同的式子。从而**自相矛盾**。

6. 试证：$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$不是整数。

对于这样的数论问题，不论是证明不是有理数，还是证明不是整数，都要坚持用反证法论证。因为现在直接证就是在踏进一片未知的领域。

证明　　**若不然**，A 是整数。

遵循探索法的思想，现在我们由简单情况入手：

$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{15}$，这时要想着 A 是整数，所以整数乘以整数仍为整数，所以应该构造一个整数与之相乘得到分数。怎么办呢？

约分是实现这样步骤的关键。需要约分奇数和偶数，但是可以发现：任何一个偶数都可以写成 2 的整数幂乘以一个奇数的形式。（实际上这对于任何整数均成立）即

$$X=2^{\alpha}\cdot\beta,\ \beta=2k+1. X,\alpha,k\in Z$$

就此例而言，我们**构造**一个$M=2^2\times3\times5\times7\times9\times11\times13\times15$ 。为什么这么构造呢？因为在所有的偶数中间，8 是最特殊的，因为它分解后得到 2 的最高次幂——3。如此构造后，相乘后必然会出现分数，从而得到此时的 A 不是整数。

仿照以上过程，可以开始证明了。

令　$2^k\le n<2^{k+1},\ k\in N.$

则　对于 $m\leqslant n$ 的 m 一定可以写成

$$m=2^{t_i}\cdot t_k\quad t_k=2l+1,t_i,l\in Z$$

而　$m\leqslant n\ \Rightarrow\ 2^{t_i}\cdot t_k\le n<2^{k+1}\ \Rightarrow\ 2^{t_i}<2^{k+1}\ \Rightarrow\ t_i\le k\ (\because t_i\in Z)$

此时，当且仅当 $2^k=m,$ 得$t_i=k$。

令　$M=2^{k-1}\cdot t_1\cdot t_2\cdot\cdots\cdot t_k'$ ，$t_1,t_2,\cdots,t_k'$为从 3 开始至分解得到的最大t_k的顺次奇数。

则　$AM=M'(\in Z)+\frac{t_1\cdot t_2\cdot\cdots\cdot t_k'}{2}$ ，整数与整数的乘积必为整数，而右边却为分数，矛盾！

故　A 为非整数。

3.消元——写在大旗上的目标

7. 求所有的正实数对(a,b)，使得函数$f(x)=ax^2+b$满足：对$\forall x,y\in R$，有

$$f(xy)+f(x+y)\ge f(x)f(y)$$

解　　对原式进行**转化**，得

$$a(xy)^2+b+a(x+y)^2+b\ge(ax^2+b)(ay^2+b)$$

这就尴尬了。有两个未知量，继续下去只能像没头苍蝇。但是，仔细想一下，如果消去一个元，不就只剩一个元了吗？

仔细看一下，由于x,y是任意的，所以在特殊情况下题设不等依然成立。那么，为消元应该采用什么办法呢？

这时候，**赋值法**又起到了重要作用，它是可以**固定变量**的。我们由赋值法可以得到必要条件。**这样做是为了得到方向。**

(i)　令$y=0$，得

$$b+(ax^2+b)\ge(ax^2+b)b$$

对$\forall x\in R$是成立的。

化简，得　$(1-b)ax^2+b(2-b)\ge0$

由于$a>0$，故　$1-b>0$

得　$0<b\le1$

这时，我们得到了 b 的范围。但是为了得到 a 的范围，我们就需要**再**固定一次变量。

有所不同的是，由于 x 和 y 是可以轮换的，所以令 $x=0$ 是没有意义的。所以，我们这样做：

(ii)　令$y=-x$，得

$$(ax^4+b)+b \geq (ax^2+b)^2$$

对$\forall x \in R$有

$$g(x)=(a-a^2)x^4-2abx^2+(2b-b^2) \geq 0$$

注意到，此时$a-a^2 \neq 0$，**若不然**，由$a>0$知，$a=1$。

此时，$g(x)=-2bx^2+(2b-b^2) \quad (b>0)$

故　$g(x)$可取负值，矛盾！

这里，再次用到了反证法，得$a-a^2 \neq 0$。进一步地，由于开口方向不能向下，则

$$0<a<1$$

我们要意识到，由于 a 和 b 的关系**并不是孤立的**，所以他们之间应该还有一种**互相约束的关系**才对。

为了找到这样的关系，我们就可以充分利用二次函数的性质，对 $g(x)$进行配方讨论。

(iii)　$g(x)=(a-a^2)\left(x^2-\frac{ab}{a-a^2}\right)^2-\frac{a^2b^2}{a-a^2}+(2b-b^2)$

对$\forall x \in R$有

$$g(x)=(a-a^2)\left(x^2-\frac{ab}{a-a^2}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b) \geq 0$$

则

$$2-2a-b \geq 0$$

至此，我们找到了必要条件：

$$\begin{cases} 0<a<1\,; \\ 0 \leq b \leq 1\,; \\ 2a+b \leq 2. \end{cases}$$

整理一下思路：

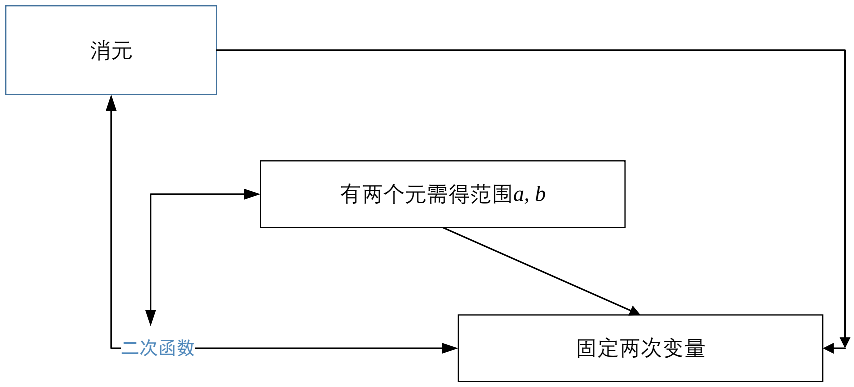


图 16

下面证明：在上述条件下，总能成立。（即证明必要条件亦为充分条件，即充分必要条件）

令　$h(x,y)=(a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(x^2+y^2)+2axy+(2b-b^2) \geq 0$

对$\forall x,y \in R$成立。

此时，遇到了麻烦。由于我们需要证明必要条件的三点也是充分条件，就意味着出现那三个因式。现在化简这个式子，是无法正好得到那几个式子的组合的。故我们需要对这个函数进行放缩。

发现后面有一个$2axy$，就思考前面的x^2+y^2能否直接放缩为消去这个因式，毕竟越简单越好嘛！

但是直接把x^2+y^2放缩为$2xy$（基本不等式），这还是无法消去的。

“事实上，$x^2+y^2\geq -2xy$也是成立的！”曹老师说到。

这就成为了关键。

$$\because\ 0<a<1,\ 0<b\leq 1,\ \ x^2+y^2\geq -2xy$$

$$\begin{aligned}\therefore\ h(x,y)&\geq (a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(-2xy)+2axy+2b-b^2\\&=(a-a^2)x^2y^2+2abxy+2b-b^2\\&=(a-a^2)\left(xy+\frac{b}{1-a}\right)^2+2b-b^2-\frac{a^3b}{1-a}\\&=(a-a^2)\left(xy+\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b(2-2a-b)}{1-a}\end{aligned}$$

神奇的事情就此发生。

由已经确定的必要条件可知，$h(x,y)\geq 0$是能够成立的！

综上所述，正实数对(a,b)应满足的条件为

$$\begin{cases}0<a<1\,;\\0\leq b\leq 1\,;\\2a+b\leq 2.\end{cases}$$

此题解决的关键确为**消元**。

8. $x,y,z\geq 0$，则$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$的最大值是__________。

解 看到这题就想了，后面这个式子的最大值是一个值，也就是一个数，也就意味着结果不含有任何一个字母的。那么，我们要做的就是**消元**。

又想了，分数是有特殊性质的——它能够**约分**。这将是消元的关键。那么，如何通过约分的方式消元呢？？？

沉思许久。没有结果。

“待定系数法。”曹老师说到。这确实亮了！也就意味着，可以对分母**构造**，使其成为能够缩的基本不等式形式。

这里，终于得到了比较清晰的思路：通过待定系数法，对分母放缩，使其能够与分子相互约分，只剩下一个值。这类似于**整体代换**呢~

再次观察：分子$xy,2yz$都有y，那么我们就对y待定系数。

再次思考：基本不等式对于少项是有技巧的：通过拆项得到恒等变形，再放缩。

再次明确：分母要放缩成与分子相同的结构。

$$x^2+y^2+z^2=x^2+\alpha y^2+(1-\alpha)y^2+z^2\geq 2\sqrt{\alpha}xy+2\sqrt{1-\alpha}yz$$

则

$$\frac{2\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{1-\alpha}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{1}{5}$$

现在可以从头写一遍了：

$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{xy+2yz}{x^2+\frac{1}{5}y^2+\frac{4}{5}y^2+z^2}\leq\frac{xy+2yz}{\frac{2}{\sqrt{5}}xy+\frac{4}{\sqrt{5}}yz}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

得解：$\frac{\sqrt{5}}{2}$。

4.构造——换一个角度解决问题

9. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n\in[1,2]$. 且

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\le\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

并问:等号成立的充要条件。

证明 还是那个原则:探索法为上,或者说是退一步。

当$n=2$时,$a_1^2+a_2^2=b_1^2+b_2^2$

$$\frac{a_1^3}{b_1}+\frac{a_2^3}{b_2}\le\frac{17}{10}(a_1^2+a_2^2)\ \Rightarrow a_1^2\frac{a_1}{b_1}+a_2^2\frac{a_2}{b_2}\le\frac{17}{10}a_1^2+\frac{17}{10}a_2^2$$

对称是美的。那么就要使分数线两边是对称的。这就是上一步的道理。

下面就想了,a_i^2就别动了。那么就$\boxed{\textbf{想方设法得到改变}\frac{a_i}{b_i}\textbf{的方法}}$。以上是对证明结果的**分析**。(**分析法**)

这时就想了,能否再**构造**一个对称的式子?

它就藏在原来不对称的式子中。

$$\frac{\frac{a_1^3}{b_1}}{a_1b_1}=\frac{a_1^2}{b_1^2}$$

太奇妙了!

对上式开方得

$$\frac{1}{2}\le\frac{\sqrt{\frac{a_1^3}{b_1}}}{\sqrt{a_1b_1}}=\frac{a_1}{b_1}(\text{引子})\le 2\qquad(\#)$$

下面,是再次考验**构造**的时候了。

合理的构造,将**同时**奇妙地使用两个不等号。去分母,构造:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{a_1b_1}-\sqrt{\frac{a_1^3}{b_1}}\right)\left(2\sqrt{a_1b_1}-\sqrt{\frac{a_1^3}{b_1}}\right)\le 0\qquad(*)$$

化简,得

$$a_1b_1+\frac{a_1^3}{b_1}\le\frac{5}{2}a_1^2$$

那么...

$$\frac{a_1^3}{b_1}\le\frac{5}{2}a_1^2-a_1b_1$$

好吧,仿照以上过程,写出 i 时情况:

$$\frac{a_i^3}{b_i}\le\frac{5}{2}a_i^2-a_ib_i$$

现在已经胜利在望了。那么现在的目的就是将a_ib_i转化为$a_i^2+b_i^2$。

那么，用基本不等式不就行了，$a_i^2+b_i^2 \geq 2a_ib_i$，那么$-a_ib_i \geq \frac{1}{2}(a_i^2+b_i^2)$……

一脸懵逼。不等号方向反了！可恶！

难道要放弃了吗？不，再思考一下：构造（*）号式子后，化简，根号就被**平方掉了**。那么，能不能“故伎重演”呢？

深思之后，依然选择以$\frac{a_i}{b_i}$的范围为中心。

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_i}{b_i} \leq 2 \ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}b_i - a_i\right)(2b_i - a_i) \leq 0 \ \Rightarrow a_ib_i \geq \frac{2}{5}\left(a_i^2 + b_i^2\right) !!!$$

成功了！

$$\frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{5}{2}a_i^2 - a_ib_i \leq \frac{5}{2}a_i^2 - \frac{2}{5}\left(a_i^2 + b_i^2\right)$$

使 i 遍历 1 至 n，叠加这 n 个式子，得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{21}{10}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

得证！！！

此时解决最后一个问题：等号成立条件。结合(*)式子，由(#)号式子得，只要不等号一端等号成立，结论等号即成立。（下面的不等式是与此相同的。）意味着：

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{1}{2} \ (i = 1,2,\cdots,n) \text{ 或 } \frac{a_i}{b_i} = 2 \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

为等号成立的充要条件。

就这样，我们在曹老师的带领下，在 15min 内完成了此题。现在回想，回味无穷…

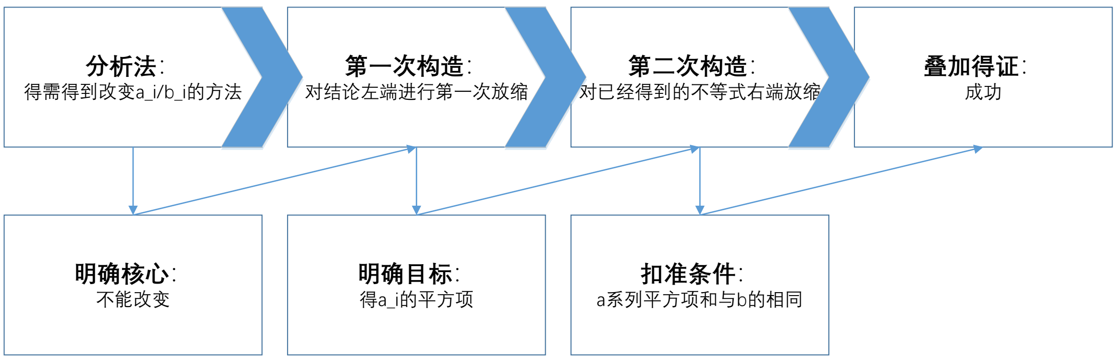


图 17

在以上的题目中，我们也见到了构造法的身影。确实，灵光一现的构造可以成为解题一大关键。

而需要注意的是，**构造是建立在已知条件的基础之上的。要构造一个为条件量身定做的东西，最终与分析法结果对接。**

5.分析法——提供思路的信号灯

10. 如图 3，M,N 分别为锐角$\triangle ABC$（$\angle A < \angle B$）的外接圆Γ上弧 BC、AC 的中点。过点 C 作 $PC//MN$ 交圆Γ于点 P，I 为$\triangle ABC$ 的内心，连接 PI 并延长交圆Γ于 T。

（1） 求证：$MP \cdot MT = NP \cdot NT$;

（2） 在弧 AB（不含点 C）上任取一点 Q（$Q \neq A,T,B$），记$\triangle AQC$，$\triangle QCB$ 的内心分别为I_1, I_2，求证：Q, I_1, I_2, T四点共圆。

复杂的图形，阻挡不了前进的决心。

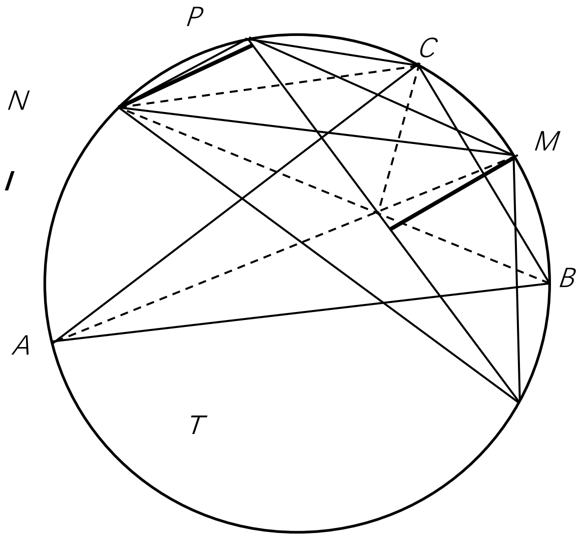


图 18

证明　（1） 做平面几何题时，最常用的做法就是**分析法**。

那么，为了证明$\boldsymbol{MP \cdot MT = NP \cdot NT}$，我们可以证明$\frac{1}{2}MP \cdot MT\sin\angle PMT = \frac{1}{2}NP \cdot NT\sin\angle PNT$，因为$\angle PMT + \angle PNT = 180°$，$\sin\angle PMT = \sin\angle PNT$。也就是证明$S_{\triangle PMT} = S_{\triangle PNT}$。由于同底 PT，所以只要证明两三角形的高（粗线）相等即可。由图可知，只要证明：PT 平分 MN。

证明平分的常用方法之一，就是在平行四边形中间接证明。这时，我们又看到了一个平行四边形 $PNIM$。那么就意味着，只要证明 $IM = NP$ 且 $PM = NI$ 即可（或者证明 $IM // NP$ 且 $PM // NI$ 亦可）。

为了证明这一点，我们需要下面的引理。

引理（内心定理）　如图4, $\triangle ABC$的外接圆为X, $\triangle ABC$的内心为I', 连接AI', BI', CI', 并延长 AI'交圆 X 于 D。连接 BD, CD。

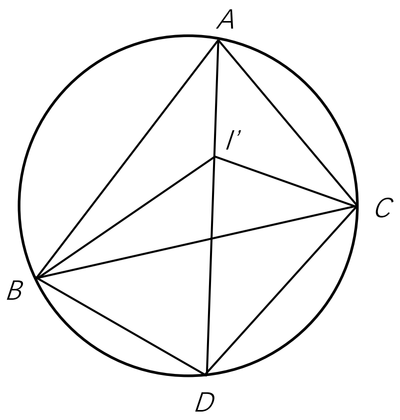


图 19

则 *BD=I'D=DC*。

继续**证明**未完成的部分。

∵ *PC//MN*（已知），且 *P,C,M,N* 四点共圆。

∴ 四边形 *PCMN* 为等腰梯形。

∴ *NP=MC*， *PM=NC*。

又∵ *I* 是△ABC 的内心。

∴ *IM=MC=NP*（内心定理，图画失误了）

(*)

同理，*IN=NP=MP*。

∴ 四边形 *PNIM* 为平行四边形。得证。

从(*)得到的教训是：**平面几何题，作图一定要精确。**由于是电脑作图，不太方便，难以做到完全精确，再次抱歉。

（2） 分析法为上。先做图。

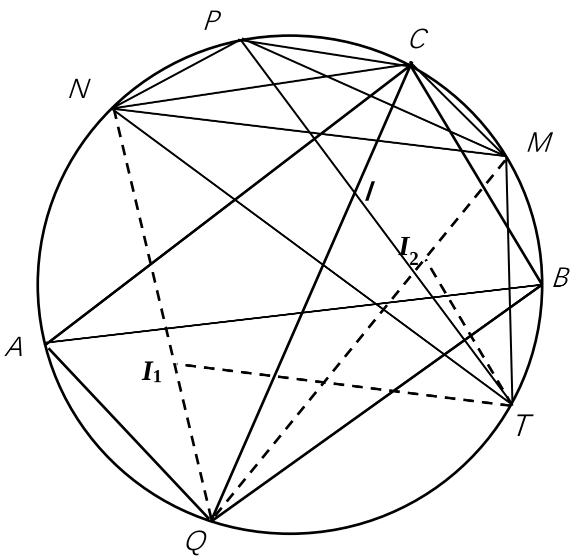


图 20

证明四点共圆的一个方法：**证明 Q,T 关于I_1, I_2的视角相同**，即$\angle I_1QI_2 = \angle I_1TI_2$。

由于 *M,N* 分别弧 *BC*、*AC* 的中点，

所以 由内心的定义得，N, I_1, Q 共线，M, I_2, Q 共线。

则　　$\angle I_1QI_2=\angle NQM=\angle NTM$（圆周角相等）$=\angle \boldsymbol{NTI_2}+\angle I_2TM$（拆分）。

而　　$\angle I_1TI_2=\angle I_1TN+\angle \boldsymbol{NTI_2}$（还是拆分）。

为证其相等，则证$\angle I_2TM=\angle I_1TN$。

通过图形发现，有两个三角形好像相似。

那么则证：$\triangle I_1NT\backsim\triangle I_2MT$

由于　　$\angle I_1NT=\angle I_2MT$（圆周角相等）

则证　　$\frac{I_1N}{NT}=\frac{I_2M}{MT}\Leftarrow I_1N\cdot MT=I_2M\cdot NT$

由内心定理得　　$I_1N=NC$　　由等腰梯形的对角线相等得　　$NC=PM$

则　　$I_1N=PM$。

同理　　$I_2M=NP$。

胜利在望！为什么？

因为　　$I_1N\cdot MT=I_2M\cdot NT\Leftarrow \boldsymbol{PM\cdot MT=NP\cdot NT}$（(1) **已证**!!!）　得证。

注意运用上一问的条件，有时候要向上一问的方向靠拢，最终得证！

“**平面几何考的不是知识，而是技巧。**”曹老师说道。

确实是“**巧几何，笨代数**”呢~

6.数学归纳法——蝴蝶效应承认真理

(继续 **3.**的**证明)　与探究法配合食用更佳。**

现在需要证明：

$$f'_{2k-1}(x)>0\quad f_{2k}(x)>0$$

已经证明起始值的情况成立。这一步对于数学归纳法而言不可省略，它是基础。

那么　　如果

$$f'_{2k-1}(x)>0\quad f_{2k}(x)>0$$

是成立的。

那么　　只要证明

$$f'_{2k+1}(x)>0\quad f_{2k+2}(x)>0$$

也是成立的。

这也是第二数学归纳法的类型（或者说类似，因为类型不同，但又有所联系）。证明两种情况同时成立，一旦同类型的都后推一项依然成立，则命题成立。

那么先证明$f_{2k+1}(x)$是递增的。

$f'_{2k+1}(x)=f_{2k}(x)>0$,正确。

现在要求$f_{2k+2}(x)$的最小值，那么我们就要证明①$f_{2k+2}(x)$也是单调递增的，②某处值为 0。由于$f'_{2k+2}(x)=f_{2k+1}(x)$，这意味着我们必须要找到$f_{2k+1}(x)$的零点x_{2k+1}，并证明它是小于 0 的。

$f_{2k+1}(0)=1>0$

由零值定理，我们必须要找到一个函数值小于 0 的点确定零点。

由于这个值要取得好算，故要取-(2*k*+1)，等于阶乘项中的最大值的绝对值。

$$f_{2k+1}(-(2k+1))$$
$$=1-(2k+1)+\frac{(2k+1)^2}{2}-\frac{(2k+1)^3}{6}+\cdots+\frac{(2k)^{2k}}{(2k)!}-\frac{(2k+1)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

现在，为了得到此值与 0 的关系，我们需找到通项与 0 的关系。

通项：

$$\frac{(2k+1)^{2n}}{(2n)!}-\frac{(2k+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{(2k+1)^{2n}(2n-2k)}{(2n+1)!}\le 0\ \ (n\le k)$$

则 $f_{2k+1}(-(2k+1))<0$

故 $f_{2k+1}(x)$在$(-(2k+1),0)$上有唯一根。此根定为x_{2k+1}。

则 $f'_{2k+2}(x)=f_{2k+1}(x)\big(x\in(-\infty,x_{2k+1})\big)<0$，$f'_{2k+2}(x)\big(x\in(x_{2k+1},+\infty)\big)<0$。

则 $f_{2k+2}(x)_{min}=f_{2k+2}(x_{2k+1})=f_{2k+1}(x_{2k+1})+\frac{(x_{2k+1})^{2k+2}}{(2k+2)!}=0+\frac{(x_{2k+1})^{2k+2}}{(2k+2)!}>0$

证毕。

以上证明难在零点的证明。说实在的，有时候就是靠灵光一现，或靠多次尝试。

但是，为了解释这个取值，还有一种思想能说明问题，就是**化归思想**。所谓化归，就是想方设法把复杂的问题简单化。我想，这也可以理解为一种原则：**懒人原则**。越简单越怎么做，这就像一些创新，就是怎么方便怎么做。

11. $x\in R,x>0,n\in N_+$，求证：

$$[nx]\ge\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}$$

求证等式中含有高斯函数的加减问题，那么就像证明绝对值不等式时有三角不等式，高斯函数在此方面也有一个定理。

定理 $$[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]$$

此时就想了，对于不等式，我们常用的方法是放缩。但此时，有着高斯函数阻隔，用放缩是不行的。

但是，别忘了，对于关于正整数一类命题的证明，我们还有一种方法——**数学归纳法**。

在学习第二数学归纳法的时候，书上说道：

（1） 先证 n=1,2 时命题成立；假设 $n=k,k$+1 时命题成立,再证明 $n=k$+2 时命题也成立（有时称之为跨度为 2 的数学归纳法）。

（2） 当 n=1 时，命题成立；假设对一切小于 n 的正整数命题成立，能够推出（证明）n 时命题也成立。

尽管书上说到“偶尔也要用到第二数学归纳法。”“第（1）种情况较常见。”但并不意味着第（2）种情况不能成立。

你说这里，若用第一数学归纳法，或用第二数学归纳法（1），要不然不能得证，要不然会麻烦死。为什么不试试**第二数学归纳法（2）**呢？

证明 令 $A_n=\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}$ 且 $A_n=A_{n-1}+\frac{[nx]}{n}$（承认递推关系）。

则

$$\begin{aligned}&nA_n=nA_{n-1}+[nx],\\&(n-1)A_{n-1}=(n-1)A_{n-2}+[(n-1)x],\\&\cdots\\&2A_2=2A_1+[2x].\end{aligned}$$

将以上 n-1 个式子相加，得

$$nA_n = A_{n-1} + A_{n-2} + \cdots + A_1 + A_1 + [2x] + \cdots [(n-1)x] + [nx]$$

假设$A_k \le [kx]$对$k = 1,2,\cdots,n-1$都成立，那么

$$\begin{aligned} nA_n &\le [(n-1)x] + [(n-2)x] + \cdots + [x] + [x] + [2x] + \cdots + [(n-1)x] + [nx] \\ &= ([(n-1)x] + [x]) + ([(n-2)x] + [2x]) + \cdots + ([x] + [(n-1)x]) \\ &\quad + [nx] \end{aligned}$$

由定理得

$$\le [nx] + [nx] + \cdots [nx] = n[nx]$$

则 $A_n \le [nx]$，成立!

命题得证!

这一题是对第二数学归纳法第（2）方式的典型例子。可见，这尽管是 IMO 的题目，**知识并不新，考的是你是否会用。**

7.数形结合——数字背后的图形

12. 在△ABC 中，角 A, B, C 对应的边分别为 a, b, c。$a+b+c=16$，求：

$$b^2\cos^2\frac{C}{2} + c^2\cos^2\frac{B}{2} + 2b\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

此题用代数法是可以完成的。但是在用代数法做的时候，首先就把$\cos^2\frac{C}{2}$拆成了(1+cos$C$)，这时候就要思考了，这让后面的$\cos\frac{C}{2}$情何以堪？那么又需要将$\sin\frac{A}{2}$拆成$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,得到平方项，接着就要换成边。

此时，你必须要意识到**第零余弦定理（又称射影定理）：$\boldsymbol{b\cos C + c\cos B = a}$**和其三种形式，否则就会陷入化成边炒鸡麻烦的化简，甚至就此放弃。

但是，代数法确实是可以完成的。特别是当你没什么头绪的时候。

不妨换个思路。命题者本意或许并不是这样的。你要猜猜他的心思。

解 这时，就跟着题干的节奏，画出了一个△ABC…

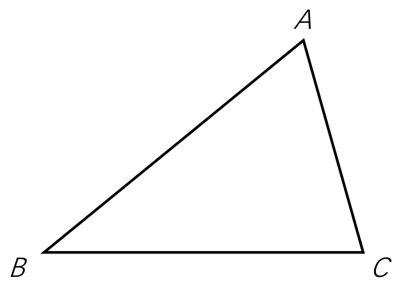


图 21

接着面对这个式子，你就尝试着组合一些东西：

$$\left(b\cos\frac{C}{2}\right)^2 + \left(c\cos\frac{B}{2}\right)^2 + 2\left(b\cos\frac{C}{2}\right)\left(c\cos\frac{B}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$$

沉思了一会儿，然后灵光一现，顺手写下：

$$\left(b\cos\frac{C}{2}\right)^2+\left(c\cos\frac{B}{2}\right)^2-2\left(b\cos\frac{C}{2}\right)\left(c\cos\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)$$

这不是余弦定理嘛!

接着就对那个三角形构造了:

延长 BC 至 E，使 $AC=CE=b$，连接 AE，你发现这时就构造出了$\frac{C}{2}$。而 $b\cos\frac{C}{2}$就是 AC 在 AE 上的投影 AM。那左边的 D，N 也用同样的处理手段。

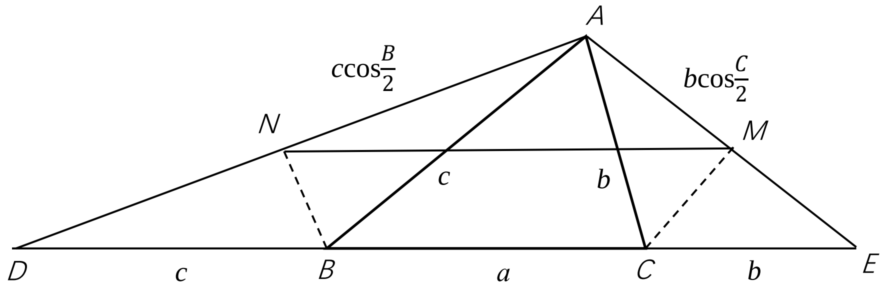


图 22

连接 MN 后，奇妙的事情就发生了。$\angle MAN=\frac{B}{2}+A+\frac{C}{2}=\frac{A+B+C}{2}+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}$!!!

构造成功!

原式$=MN^2=\left[\frac{1}{2}(a+b+c)\right]^2=\frac{1}{4}(a+b+c)^2=64.$（中位线定理）

那么对于这样的题目，就要找到一些特征，**理解命题者的意图**，才能找到通道。顺着题目做下去也是可以的! 毕竟题目中处处暗示，别错过了。

13. $p,q\in(0,1)$，$p+q>1, p^2+q^2\le 1$。求

$$f(x)=(1-x)\sqrt{p^2-x^2}+x\sqrt{q^2-(1-x)^2}$$

在[1-q,q]上的最大值。

有了上一题的体验后，是否对这一题有了些许想法? 见到根号，还是不是直接平方? 是不是想想构造、距离这一类的……

停，你说到距离!

这个想法将是敲门砖。

解 画 AB=1。作 $BC=\sqrt{q^2-(1-x)^2}$，作 $AD=\sqrt{p^2-x^2}$。（$BC\perp AB$，$AD\perp AB$）

取 E 使得 AE=x，BE=1-x。连接 DE, CE, CD。

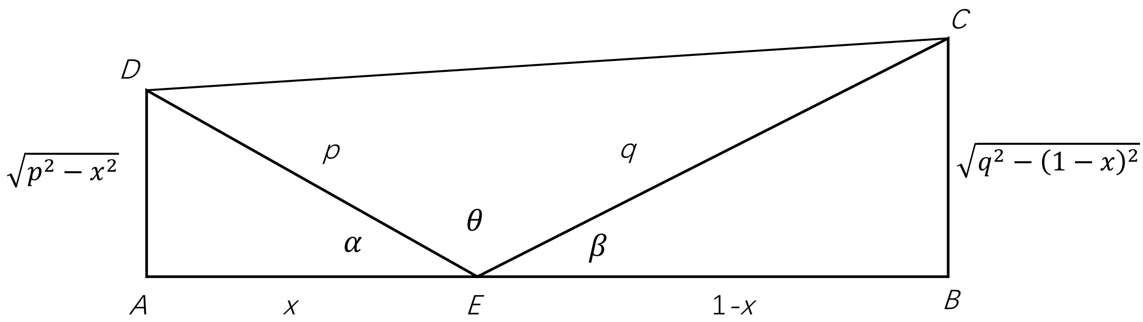


图 23

设$\angle AED=\alpha, \angle BEC=\beta, \angle CED=\theta$。设出角度将更容易地解决问题。

由图形得:

$$x=p\cos\alpha \quad 1-x=q\cos\beta \quad \sqrt{p^2-x^2}=p\sin\alpha \quad \sqrt{q^2-(1-x)^2}=q\sin\beta$$

则原式变为

$f=q\cos\beta\, p\sin\alpha+p\cos\alpha\, q\sin\beta=pq\sin(\alpha+\beta)=pq\sin\theta$

这是f的实质。

而

$$\cos\theta=\frac{p^2+q^2-CD^2}{2pq}\le\frac{p^2+q^2-1}{2pq}\le 0$$

上面是因为 $CD\ge 1, p^2+q^2\le 1$（已知）。

所以

$$\cos^2\theta\ge\frac{(p^2+q^2-1)^2}{4p^2q^2}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\ge\sqrt{1-\frac{(p^2+q^2-1)^2}{4p^2q^2}}$$

当且仅当 CD=1 时，即 BC=AD 时，即$x=\frac{p^2+1-q^2}{2}\in[1-q,p]$时，$f$取得最大值$\sqrt{p^2q^2-\frac{1}{4}(p^2+q^2-1)^2}$。(由图可知，$p+q>1$是成立的，要不然，你由等号成立条件解出 p,q 的关系，亦是成立的。)

此题当然用代数**换元**也可做，就是要注意，像这个几何图形一样，**把四个部分全部换成不同的元，并声明新元之间的关系**，再做。但数形结合是不是显得更有意思呢?

数形本一家。

正如著名数学家拉格朗日所言:“代数与几何在它们各自的道路上前进的时候，它们的进展是缓慢的，应用也很有限，但当这两门学科结合起来之后，它们各自向对方吸取新鲜的活力，从此，便以很快的速度向着完美的境地飞跑。”(朱华伟、程汉波, 2016)

而“巧几何，笨代数”也。

这句话可以细细斟酌一下。这里的“巧”指的是几何问题的方法“巧妙”，“笨”指的是代数问题的方法就是计算，不能怕麻烦。通过比较，将发现:**为了做出一道题，*T*（Thinking，思考）+*D*（Do,做）=*k*（定值）**。只有提前思考、准备充分、为后面的计算铺好道路，做的才会更巧妙，更有效。这是我自己总结的呢~

8.转换——看清题目的本质

14. $x,y\in R$，$x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则 x 的取值范围是________。

这个式子，就现在的状态来看，简直无从下手。因为它的实质隐藏的太深了。那么就把**实质**抓出来！

令　$a=\sqrt{y}\geq 0$，$b=\sqrt{x-y}\geq 0.$

则　$x=a^2+b^2$,一定不要忘了新元之间的关系和与所求的关系。

则原式立即转化为

$$a^2+b^2-4a=2b\quad\Rightarrow(a-2)^2+(b-1)^2=5$$

数形结合就得范围，但是要小心哦~

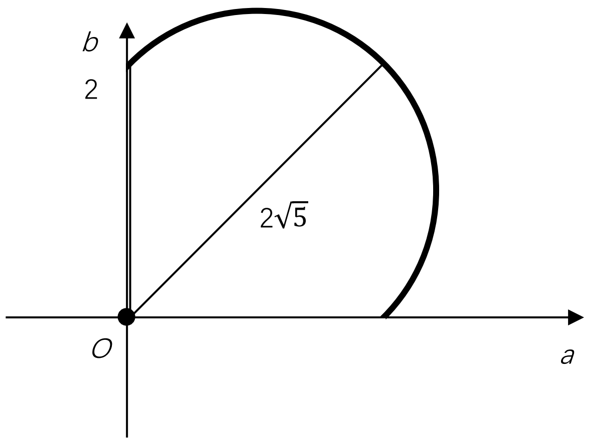


图 24

则$x\in\{0\}\cup[4,20]$。

0!!! 忘了没？这题后面不是难，而是拿不到分。

再回到开始，我们发现**换元（转换）**让我们看到了本题的实质。借用另一个老师的话说，“**换元，是因为命题者用错了符号，你要用正确的符号表示出来。**”

转换的思想实际上上面已经用到不少了，例如数形结合就是把数字转化成了图形。转换就是对无从下手问题的杀手锏，把它转换成已知问题，从而有所解决。

9.算两次——横着竖着都是二

15. $P_n(k)$是$\{1,2,\cdots,n\}$的保持 k 个元素不动的排列总数。

求证：

$$\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)=n!$$

证明　　由题设知

$$P_n(k)=C_n^kP_{n-k}(0)$$

意思就是 ***k*** **个元素不动的排列总数**就等于 ***n*** **个元素选出** ***k*** **个元素的组合数乘以剩余** ***n-k*** **个元素都动的排列数**。

得到的这个等式可用作条件，用组合恒等式继续证明，最终得证。

注意，这里就用到了**算两次**思想。关键只用在这么一点上是多么不爽，若全局都用算两次思想呢？

这是有点像**贡献法**的方法。

我们用 **1** 表示固定，0 表示不固定。

表 4

<table>
<tr><th colspan="2">元素</th><th>1</th><th>2</th><th>…</th><th>n-1</th><th>n</th></tr>
<tr><td rowspan="14">方法
k－不动元素数</td><td>(0)</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">……</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">……</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>3-1 余为 0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">……</td></tr>
<tr><td>……</td><td>……</td><td>……</td><td>……</td><td>……</td><td>……</td></tr>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

我们以**纵列**为本计数：由于固定任意一个元素，其余的元素随意动有$(n\text{-}1)!$种方法，故共有$n\times(n-1)!=n!$个 **1**。或者说**元素固定总次数是** $\boldsymbol{n!}$。

现在，我们以**横行**为本计数：k=1 时，有$P_n(1)$个 **1**；k=2 时，有$2\times P_n(2)$个 **1**；……；k=n 时，有$n\times P_n(n)$个 **1**。则**元素固定总次数是**

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{kP_n(k)}$$

公理（笑）　一堆可数的东西，不论你怎样数，只要数的正确，数完后的个数总是相同的。

⇒　这个表格中加粗的 **1** 的个数是一定的，所以不论纵着数，还是横着数，其个数总是相同的。得到结论而证毕：

$$\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)=n!$$

模型的设计 + 算两次思想的应用 = 此题的攻略。

10.多管齐下——来一场思想的风暴吧

16. 求证：$\forall n \in N_+, \exists R_n \in N_+ \ et.$

（1）它是 n 位数。

（2）它的每位数都不是 0。

（3）它能被其各位数字之和整除。

证明 **警告：**题是短小而精悍的。

（i）现在先用最直接的思路思考，什么样的数简单而使其成立呢？

什么东西能和各位数字之和联系起来呢？3 的倍数！所以根据小学知识 111 是成立的。那么：

111，111111111，111111111111111111111111111（别数了，是 27 个 1）这些数是不是很好呢？对，这些数都是符合要求的。（**探索法**）

那么，它们有什么特征呢？

-位数是 3 的整数次幂。

似乎：$\mathbf{3^n | R_{3^n} = \overline{111\cdots11}}$ **（$\mathbf{3^n}$个 1）**。（**换元(转换)＋ 构造**）

这是一个惊人的结论！那么，我们用数学归纳法证明一下吧。

引理 $\mathbf{3^n | R_{3^n} = \overline{111\cdots11}}$ **（$\mathbf{3^n}$个 1）**

证明 当 $n=1$ 时，容易证得，成立。

假设当 $n=k$ 时成立，即$3^k | R_{3^k} = \frac{1}{9}\left(10^{3^k}-1\right)$。

则

$$R_{3^{k+1}} = \frac{1}{9}\left(10^{3^{k+1}}-1\right) = \frac{1}{9}\left[\left(10^{3^k}\right)^3-1\right] = \frac{1}{9}\left(10^{3^k}-1\right)\left(10^{2\times 3^k}+10^{3^k}+1\right)$$

$$= R_{3^k}\left(10^{2\times 3^k}+10^{3^k}+1\right)$$

（**化归**）

因为 $3\left|\left(10^{2\times 3^k}+10^{3^k}+1\right)\right. = \overline{100\cdots0100\cdots01}$ （小学知识）

且 $3^k | R_{3^k} = \frac{1}{9}\left(10^{3^k}-1\right)$

则 $3^{k+1} | R_{3^{k+1}}$成立。

命题成立。（**数学归纳法**）

（ii）翻越一座山，现在要翻另一座山了。

事实上 当$R_{3^n} = \overline{999\cdots99}$（$3^{\mathrm{n}}$个 9）引理也是成立的。

铺垫 若有某个自然数$k \geq \frac{n}{2}$， 设$j = n-k$。

则用任意的$j(1 \leq j \leq k)$位数$\overline{a_1 a_2 \cdots a_j}$乘以$\overline{99\cdots9}$（$k$ 个 9）得

$$\overline{a_1a_2\cdots a_j}\times\overline{99\cdots 9}=\overline{a_1a_2\cdots a_j}\times\left(10^k-1\right)=\overline{a_1a_2\cdots a_j00\cdots 0(k个)}-\overline{a_1a_2\cdots a_j}$$

$$=\overline{a_1a_2\cdots a_{j-1}\left(a_j-1\right)99\cdots 9\left(k-j个\right)(9-a_1)\cdots(9-a_{j-1})(10-a_j)}$$

（高中的减法）

这是一个$j+k-j+j=j+k=n$位数。（强而有力的**构造**）

这个构造将是一个很大的铺垫。

当$n=3^l,l\in N$时，证明是存在的。
当$3^l<n\leq 2\cdot 3^l,l\in N$时：

设$k=3^l,j=n-3^l$,任意的$\overline{a_1a_2\cdots a_j}$如$\overline{11\cdots 12}$，根据**铺垫**得：

$$\overline{11\cdots 12\left(j位\right)}\times\overline{99\cdots 9\left(k位\right)}=\overline{11\cdots 1\left(j个\right)99\cdots 9\left(k-j个\right)88\cdots 8\left(j个\right)}$$

各位数字和为$9k=9\cdot 3^l$,而看前面的因数，由于$k\left|\overline{99\cdots 9\left(k位\right)}\right.\Rightarrow$ $3^l\left|\overline{11\cdots 1\left(3^l位\right)}\right.$在（i）的基础上容易证得是成立的。所以此$n$位数符合要求而存在。

当$2\cdot 3^l<n\leq 3^{l+1},l\in N$时，同理可证，是存在的。
综上所述，命题得证!!!!!!

11.放松一下——题目有时也是那么简单

17. $a,b\in R$，$f(x)=ax+b$ $et.$ $\forall x\in[0,1],|f(x)|\leq 1$。
则ab的最大值是___________。
为了能够有所思考，下面对思想做一次宏观的总结。答案在下一页。

12.总结——思想的火花　点亮黑暗的夜晚

以上，我们系统地对数学竞赛题目的重要思想，按着例题，进行了详细而透彻的总结，并体验了数学思想对于解题的帮助作用之大。

但是，我们在体验各个思想的作用时，也不能忽略它们互帮互助的作用。在一些复杂的题目面前，有些思想就要同时使用才有效果。

说数学思想是什么。它是一个抽象的东西，但是暗示着解题的方向，提高数感，挖掘题目背后的秘密。我们需要一些思想，把这些短小精悍的题目扩大化，而我们亦需要一些思想，把这些探索得到的宝藏炼就成一颗璀璨夺目的宝石，得到题目所要的结果。

思想，就是一个模板，就是一个平台，一个宏大的平台。思想是帮助你想到解法的途径，是你脑海中对题目解答抽象化的精华。数学思想在做题前帮助想到途径，在做题中固定前进的方向，在做题后升华对整个题目的理解。

理解一个个题目的做题思想，就像点亮一把把炙热的火把，将在未来的解题中照亮黑暗的夜晚！

说好的答案在这里。
由题目得$|f(1)| = |a+b| \le 1$

则由**基本不等式**得$ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{1}{4}$

当且仅当$a = b = \frac{1}{2}$时，等号成立。

平面区域呢？函数关系呢？
有张有弛，方能解决**“难题”**。

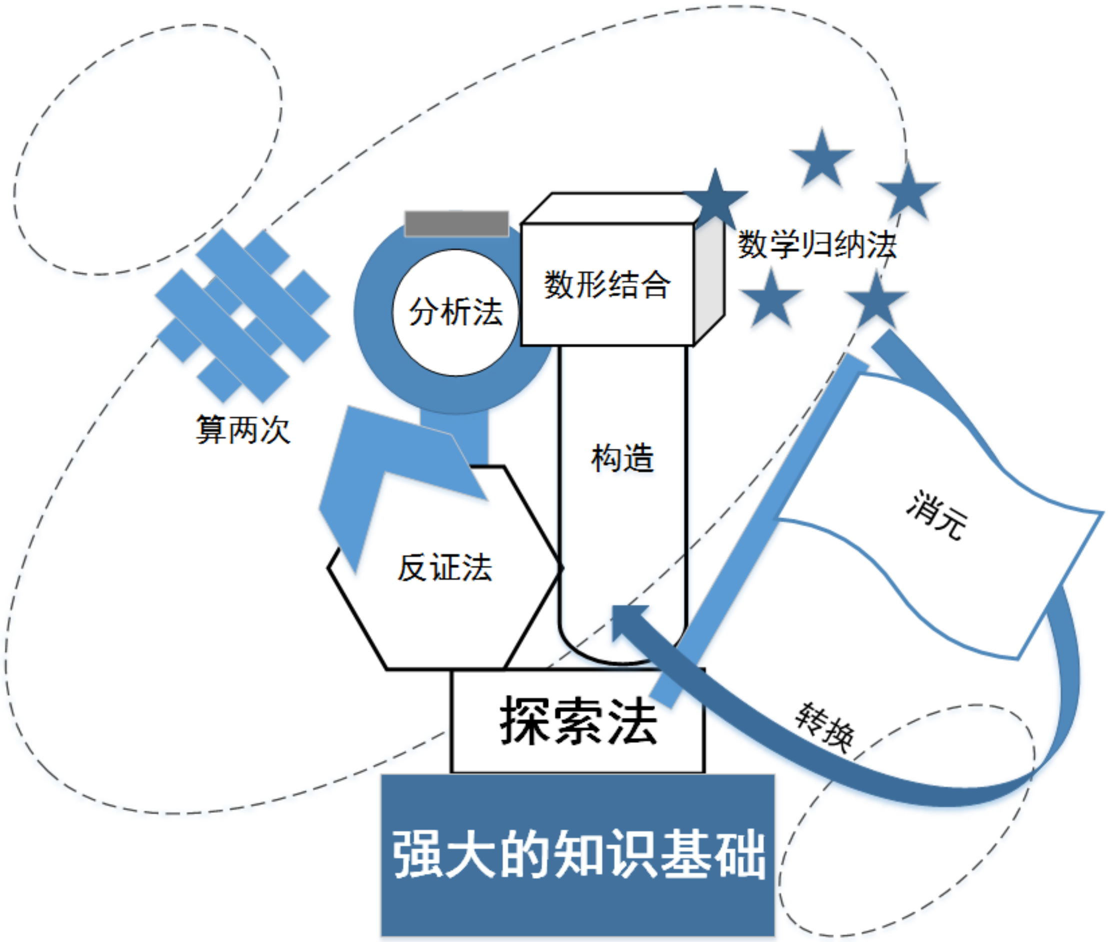


图 25

数论

陈永高（2017.2） 卞老师（2017.8）

数论里的问题大部分需要构造。关于用构造法解题的议论见下文。

1.二项展开

对于给定的a,T，$(Tk+a)^m=T\binom{K}{\text{因式}}+a^m$。

【例 1】求证：∃无穷多个$x\in\mathbb{Z}$，使得$x^5+(x+1)^4$为合数。

证明 （法一，二项构造法）**引理** 对于给定的a,T，$(Tk+a)^m=T\binom{K}{\text{因式}}+a^m$。

则令$x=Tk+a$，$x^5+(x+1)^4=(Tk+a)^5+(Tk+a+1)^4=T\binom{W}{\text{因式}}+a^5+(a+1)^4$。

//在草稿纸上进行

令$a=1$，$a^5+(a+1)^4=17$，则$T=17$时，原式为合数

当$T=a^5+(a+1)^4$时，式为合数，且有无穷多个。 ☐

（法二，齐次构造法）**引理** $x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$

取$x+1=m^5$，则$x^5+(x+1)^4=x^5+(m^4)^5$，由上式知，这是合数。 ☐

【例 2】设$a,b\in\mathbb{N}_+,b>2$，求证：$(2^b-1)\nmid(2^a+1)$。

证明 令$a=bk+r,0\le r<b,k,\ r\in\mathbb{Z}$.则

$$2^a+1=2^{bk+r}+1=\left(2^b-1+1\right)^k2^r+1=\left[\left(2^b-1\right)\binom{T}{\text{因式}}+1\right]2^r+1$$

$$=\left(2^b-1\right)\binom{T}{\text{因式}}2^r+\mathbf{2^r+1}$$

一方面，为了使$\left(2^b-1\right)|(2^a+1)$，则$\left(2^b-1\right)|(\mathbf{2^r+1})$，则$2^b-1\le 2^r+1$。

另一方面，由于$r<b$，由于整数的离散性，$r\le b-1$，则
$2^r+1\le 2^{b-1}+1<2^b-1(b>2)$。这是矛盾的。
所以，$(2^b-1)\nmid(2^a+1)$。

2.费马小定理

Fermat 小定理

如果 p 为素数，$(a,p)=1$，则 $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$。

【例 3】求证：存在无穷多个$n\in\mathbb{N}$，使得10^n+3是合数。

（系列一）拆项以合并，$10^n+\mathbf{3}=10^n-\mathbf{10}+\mathbf{13}=10(10^{n-1}-1)+13$，根据 Fermat 小定理可得

$$13|a^{12}-1,13\nmid a$$

则取$10^{n-1}=a^{12}$,即$n-1=12k,k\in\mathbb{N}$,故n=13,25,⋯无穷多个。

（系列二）“醉翁之意不在酒，在乎山水之间也。”由上文可知，

$$13|10^{13}-10 \Longrightarrow 13|10^{13}+3$$

现在寻找第 2 个，由上式的启发

$$10^n+3=10^n-10^{13}+10^{13}+3$$

我们取$n=13^2$，得

$$13|10^{13^2}+3=10^{13}(\mathbf{10^{13}-1})+\mathbf{10^{13}+3}$$

那么，$n=13^k$

$$13|10^{13^k}+3=\left(10^{13^k}-10^{13^{k-1}}\right)+\left(10^{13^{k-1}}-10^{13^{k-2}}\right)+\cdots+(10^{13}+3)$$

拆 0 这个项有重大意义。

□

3.阶

设$m\in\mathbb{N},m>1,a\in\mathbb{Z}$，$(a,m)=1$，称满足$m|a^r-1$（$a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$）的最小正整数$r$为$a$模$m$的阶。

- 阶一定存在。且$r<m$。**（阶的存在性）**

  证明　设$a^k=mq_k+r_k,0\le r<m$。考虑$r_0,r_1,\dots,r_{m-1}$共m个数，由于它们均是 1 至$m-1$中的正整数，由**抽屉原理**知，必有两数相同，设其为$r_i=r_j,i>j$。

$$a^j\left(a^{i-j}-1\right)=a_i-a_j=m\left(q_i-q_j\right)$$

  由$(a,m)=1$得$m|\left(a^{i-j}-1\right)$，而$1\le i-j\le m-1<m$，所以阶一定存在，为 *i-j*，且小于 *m*。 □

- 存在 *n* 使得$m|a^n-1\Leftrightarrow r|n$。**（阶的整除性）**

  证明　先证充分性。$n=rk,k\in\mathbb{Z}$，$a^n-1=a^{rk}-1=(a^r-1)(\dots)$,由于$m|a^r-1$，故$m|a^n-1$。

  再证必要性。令$n=rq+s,\ q,s\in\mathbb{Z},0\le s<r$。而

$$a^n-1=a^{rq+s}-1=(a^{rq}\mathbf{-1})\boldsymbol{a^s}+\boldsymbol{a^s}-1$$

由充分性已得，$m|a^{rq}-1$，而$m|a^n-1$，故$m|a^s-1$，由阶的定义知，*s*=0。□

【例 4】设$m>1$，求证：$m\nmid(2^m-1)$。

本题可用多种方法解决，可长可短。但核心是反证法。

证明　（法一，最小数原理）假设存在$m>1$，使$m|(2^m-1)$。

使用隐形归纳（最小数原理）。设m_0为这样的m中最小的一个，则$m_0|(2^{m_0}-1)$。设 2 模m_0的阶为r，则$m_0|(2^r-1)$。则$r|m_0$。

则$r|(2^r-1)$，而$r>1$.

一方面，由m_0为这样的m中最小的一个，$r\ge m_0$。

另一方面，由阶的性质知，$r<m_0$。

这是矛盾的。故$m>1$，$m\nmid(2^m-1)$。 □

（法二，Fermat）假设存在$m>1$，使$m|(2^m-1)$。

设m的最小素因子为p，$p|m$，则$p|(2^m-1)$。

由 Fermat 小定理知，$p|(2^{p-1}-1)$。

设 2 模 *p* 的阶为 *r*。$r|m,r|p-1$，而$(m,p-1)=1$。

事实上，$r=1$。若不然，$r>1$,设 q 为 r 的一个素因子，则$q|m$，由于m的最小素因子为p，故$q \geq p$。

另一方面，由$r|p-1$知$r \leq p-1 \Rightarrow q \leq p-1$。这是矛盾的。

故 $r=1$。

但由阶的定义知，$p|(2^r-1)$，即$p|1$，这是不可能的。故$m \nmid (2^m-1)$。 □

（法三，引理）**引理** 设$m,n \in \mathbb{N}_+$，$(2^m-1,2^n-1)=2^{(m,n)}-1$。

引理之证 令$d=(m,n)$, $m=dk, k \in \mathbb{N}_+$。则$2^m-1=2^{dk}-1=(2^d-1)(\ldots)$

故$(2^d-1)|2^m-1$。同理，$(2^d-1)|2^n-1$。

故$2^d-1 \leq (2^m-1,2^n-1)$。

令$M=(2^m-1,2^n-1)$，欲证

$$M \leq 2^{(m,n)}-1$$

则证$M|(2^m-1), M|(2^n-1)$.

由定义知，M 为奇数，即$(2,M)=1$，设 2 模 M 的阶为 r，则由阶的性质知，$r|m, r|n$，则$r \leq (m,n)$。由阶的定义知，

$$M|(2^r-1) \Rightarrow M \leq 2^{(m,n)}-1$$

则$M=(2^m-1,2^n-1)=2^{(m,n)}-1$。

假设存在$m>1$，使$m|(2^m-1)$。

设m的最小素因子为p，$p|m$，则$p|(2^m-1)$。

则由引理得，$(2^m-1,2^{p-1}-1)=2^{(m,p-1)}-1$

由 Fermat 小定理知，$p|(2^{p-1}-1)$。

则$p \leq (2^{p-1}-1,2^m-1)=2^{(m,p-1)}-1$

由于$(m,p-1)=1$，则$p \leq 1$，这是不可能的。 □

最后一种方法看似长，但若熟知引理，是前面方法中容易的一个。

4.构造

对于存在性命题，数论中大部分的处理方法都是构造法。这需要一定的分析与数感。

下面就是一个例子。

【例 5】求证：对任何的整数$n \geq 2$，总存在n个互不相同的正整数$a_1,a_2,\ldots,a_n$，使得$(a_i-a_j)^2|a_ia_j$，对$\forall 1 \leq i<j \leq n$成立。

涉及到与正整数 n 有关的命题，大部分均可用数学归纳法。这一题是可以的。

证明 对 n 使用数学归纳法。

（1）起步（奠基） 当 $n=2$ 时，取$a_1=2, a_2=3$。

（2）过渡 假设对 n 成立，则存在$a_1,a_2,\ldots,a_n$满足要求。

（3）退一步 先找 n 个不同于$a_1,a_2,\ldots,a_n$满足要求的数。

如何构造呢？可以考虑每个数都加一个数 T。

考虑$T+a_1,T+a_2,\ldots,T+a_n$，则要使得$(T+a_i-T-a_j)^2|(T+a_i)(T+a_j)$成立，即$(a_i-a_j)^2|(T+a_i)(T+a_j)=T(T+a_i+a_j)+a_ia_j$，已经知道，$(a_i-a_j)^2|a_ia_j$。

那么 T 应是一个全局的量，因为要对$\forall 1 \leq i<j \leq n$成立。

如果$T=\prod a_i$呢？则$(T+a_i)(T+a_j)=T(T+a_i+a_j)+a_ia_j=a_ia_j(\dots)$这样就构造成功了！

构造并不能一次就能成功，但若构造的整体方向正确（在这里是全局量），是很有构造出来的。

（4）最后一步 第 n+1 个数？它应该也是一个全局量。

如果就是 T 呢？

$$(T+a_i-T)^2|(T+a_i)T\Rightarrow a_i^2|(T+a_i)T$$

这显然是成立的。

故对于 n+1，系列：$T+a_1,T+a_2,\dots,T+a_n,T$，$T=\prod a_i$是满足要求的。

（5）下结论 由数学归纳法原理知，对任何的整数$n\geq 2$，命题皆成立。

□

5.枚举法

枚举法又称分类讨论，穷举法等。初等数论中许多问题需要通过分类讨论解决，尤其是不定方程。

【例 6】试定出不定方程$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$的所有整数解(x,y)。

解 首先因式分解式没有错的。

$2^x(1+2^{x+1})=(y+1)(y-1)$。

并结合原式，$y^2>1$得，$x\geq 0,y^2\in\mathbb{N}_+$。

$x=0,y=\pm 2;x=1,y^2=11(X);x=2,y^2=37(X);x=3,y^2=137(X);$

下设$x\geq 4$,将因式分解后的式子改写为：

$$2^{x-2}(1+2^{x+1})=\frac{y+1}{2}\frac{y-1}{2}$$

由于$\left(\frac{y+1}{2},\frac{y-1}{2}\right)=1$ $\left(\because\frac{y-1}{2}+1=\frac{y+1}{2}\right)$，这样就构成了分别整除的结构。

则$2^{x-2}\left|\frac{y+1}{2}\right.$或$2^{x-2}\left|\frac{y-1}{2}\right.$。

情形 1 $\frac{y+1}{2}=k\cdot 2^{x-2}$,则由方程得$\frac{y-1}{2}\cdot k=2^{x+1}+1$，则$k$为奇数。

当$k=1$时，$\frac{y+1}{2}=2^{x-2}<2^{x+1}+1=\frac{y-1}{2}$,这是矛盾的。

当$k=3$时，$\frac{y+1}{2}=2^{x-2}\cdot 3,\frac{y-1}{2}\cdot 3=2^{x+1}+1$,解得$(x,y)=(4,23),(4,-23)$.

当$k\geq 5$时，

$$\begin{cases}\dfrac{y+1}{2}=2^{x-2}k\geq\dfrac{5}{4}\cdot 2^x\geq\dfrac{5}{4}\cdot 2^4=20\\ \dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2^{x+1}+1}{k}\leq\dfrac{2^{x+1}+1}{5}=\dfrac{2}{5}\cdot 2^x+\dfrac{1}{5}\leq\dfrac{2}{5}\cdot 2^4+\dfrac{1}{5}=6.6\end{cases}$$

这是矛盾的。

情形 2 $2^{x-2}\left|\frac{y-1}{2}\right.$,则由方程得$\frac{y+1}{2}\cdot l=2^{x+1}+1,\frac{y-1}{2}=l\cdot 2^{x-2}$，则$l$为奇数。

当 $l=1$ 时 ， $\frac{y+1}{2}=2^{x+1}+1;\frac{y-1}{2}=2^{x-2}\Rightarrow\frac{y+1}{2}=2^{x-2}+1\Rightarrow 2^{x+1}+1=$

$2^{x-2}+1$，无解。

当$l=3$时，$\frac{y+1}{2}\cdot 3=2^{x+1}+1, \frac{y-1}{2}=3\cdot 2^{x-2}$，无解。

当$l\geq 5$时，

$$\begin{cases}\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{2^{x+1}+1}{l}\leq\dfrac{2^{x+1}+1}{5}\leq\dfrac{33}{5}\\ \dfrac{y-1}{2}=l\cdot 2^{x-2}\geq 5\times 4=20\end{cases}$$

这是矛盾的。

综上所述，$(x,y)=(0,2),(0,-2),(4,23),(4,-23)$.

6.拉格朗日定理

设p是质数，n是非负整数，多项式$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$是一个模$p$为$n$次的整系数多项式（即$p\nmid a_n$），则同余方程$f(x)\equiv 0(\bmod p)$至多有$n$个解（在模$p$有意义的情况下）。

证明 对其等价命题使用数学归纳法。

设p是质数，n是非负整数，对于多项式$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，同余方程$f(x)\equiv 0(\bmod p)$有$n+1$个解（在模$p$有意义的情况下），则$p|a_n$。

引理：余数定理 多项式$f(x)$除以$x-a$的余数等于$f(a)$。

引理之证 设商为$q(x)$，余数为r，在等式$f(x)=q(x)(x-a)+r$中将$x=a$代入得$f(a)=r$。即$f(x)=q(x)(x-a)+f(a)$。

(李尚志, 2014, p. 252)

（i）当$n=1$时，$f(x)=ax+b\equiv 0(\bmod p)$有 2 个根$x_1,x_2$。则

$$p|ax_1+b \quad p|ax_2+b$$

则 $$p|a(x_1-x_2)$$

显然由于p是质数， $$(p,x_1-x_2)=1$$

则 $$p|a,\ p|b$$

（ii）假设对于$n=k-1$时，$f(x)\equiv 0(\bmod p)$有k个根，有$p|f(x)$。

那么$n=k$时，$f(x)\equiv 0(\bmod p)$ 有$k+1$个根$x_0,x_1,\ldots,x_k$。

若$f(x_0)\equiv 0(\bmod p)$，则由引理知，

$$f(x)=(x-x_0)g(x)+f(x_0)=(x-x_0)g(x)+mp, m\in\mathbb{Z}.$$

有

$$\deg f(x)=k \implies \deg g(x)=k-1$$

$f(x)=(x-x_0)g(x)+mp\equiv(x-x_0)g(x)\equiv 0(\bmod p)$ 有 $k+1$ 个根，那么$g(x)\equiv 0(\bmod p)$有 k 个根。由归纳假设知，

$$p|g(x)$$

则

$$p|f(x)$$

由数学归纳法原理知，拉格朗日定理成立。 □

【例 7】p 是素数。

求证：

（1）$p\geq 3$

$$p\left|\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)(p-1)!\right.$$

（2）$p\geq 4$

$$p^2\left|\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)(p-1)!\right.$$

证明：（1）由于

$$p\left|\frac{1}{i}+\frac{1}{p-i}=\frac{p}{i(p-i)}\right.$$

而 p 是奇数，则 p-1 是偶数。则必能两两配对。由此证毕。

（2）构造函数$f(x)=(x-1)(x-2)\dots\big(x-(p-1)\big)=x^{p-1}+g(x)+(p-1)!$

其中$\deg g(x)=p-2$。$f(x)=0$的根为 1，2，…，p-1。

注意到$f(x)$的一次项就是$\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)(p-1)!\right]x$，则$g(x)$的一次项也是$\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)(p-1)!\right]x$。

根据 Fermat 定理与 Wilson 定理，可得

$$x^{p-1}+(p-1)!\equiv 1+(-1)\equiv 0(\operatorname{mod} p)$$

则$f(x)=x^{p-1}+g(x)+(p-1)!\equiv g(x)\equiv 0(\operatorname{mod} p)$的根有 p-1 个。由拉格朗日定理可得，

$$p|g(x)$$

注意到$(p-1)!=f(p)=p^{p-1}+g(p)+(p-1)!\Longrightarrow p^{p-1}+g(p)=0$

$$p^{p-1}+a_{p-2}p^{p-2}+a_{p-3}p^{p-3}+\cdots+a_2p^2+a_1p=0$$

其中$a_{p-2},a_{p-3},\dots,a_1$都是 p的倍数。注意到

$$a_1=\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)(p-1)!\right]$$

$$\begin{aligned}g(p)=a_{p-2}p^{p-2}+a_{p-3}p^{p-3}+\cdots+a_2p^2+a_1p&=-p^{p-1}\\&\equiv 0(\operatorname{mod} p^3),\text{且}a_{p-2}p^{p-2}+a_{p-3}p^{p-3}+\cdots+a_2p^2\equiv 0(\operatorname{mod} p^3)\\&\Longrightarrow p^2|a_1\end{aligned}$$

由此证毕。 □

数学归纳法[7]

数学沙龙(II)　Log Creative (2017.4)

1.引入数学归纳法

本讲目标

- 了解第一数学归纳法。
- 感受直接证法与数学归纳法的区别。
- 通过本讲，相信数学归纳法是正确的。

数学上的许多命题都与正整数 n 有关，这样的一个命题实际上就是一整列命题。要证明这样的一个命题成立，当然可以有多种不同的方法。

直接证法　置 n 的任何具体值不顾，仅仅把它看成是一个任意的正整数。
也就是说，假定它只具备任何正整数都具备的共同性质，并在这样的基础上进行推导、运算。

适用范围　若我们在推导过程中没有遇到什么难以克服的困难，那么我们就有可能用这种方法（直接证法）来完成命题的证明了。

【例 1】求证：对$n \in \mathbb{N}_+$，如下等式均能成立：

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

（法一，直接证法）这是一道很经典的习题了，它的套路就是观察右端有$2\sin\frac{1}{2}x$作为分母，就想到去分母，这样就出现了三角函数之间的乘积。再继续做下去，就看到了这样做更为巧妙的地方。

证明　$LHS=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left(\sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+\cdots+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x\right)$

利用和差化积公式

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

可得

$$2\cos x\sin\frac{1}{2}x=\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x$$

$$2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x=\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x$$

$$\cdots$$

则$LHS=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=RHS$　□

在以上的推导过程中，并没有考虑 n 为奇数或偶数，就完成了证明。这里的直接证法即我们所说："将 n 置于任意境地"的含义。然而这样的证法有时却难以想到，特别是构造了一个裂项求和的结构。那么我们所学过的数学归纳法就可以很自然地解答。

[7] 全文部分摘自《漫话数学归纳法》（苏淳, 2014）、《从特殊性看问题》（苏淳, 2014），添加了一些个人观点。

（法二，数学归纳法）

$P(n)$ 为了证明其能成立

【起步】

先对最小的n_0，验证$P(n_0)$成立。

（1）当 n=1 时，我们有

$$LHS=\frac{1}{2}+\cos x$$

（三倍角公式）

$$RHS=\frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{3\sin\frac{1}{2}x-4\sin^3\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{3}{2}-2\sin^2\frac{1}{2}x$$

$$=\frac{3}{2}-(1-\cos x)=\frac{1}{2}+\cos x$$

LHS = RHS 对 n=1 是成立的。

【归纳假设】

然后假定对 $n=k$，$P(k)$成立。

（2）假设对于 $n=k$，等式成立，即

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos ix=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

【归纳过渡（向前跨步）】

并在此基础上，推出$P(k+1)$成立。

要证明对于 $n=k+1$，等式也能成立。我们有

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos ix+\cos(k+1)x$$

自然地通分

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+2\cos(k+1)x\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

自然地和差化积

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(k+\frac{3}{2}x\right)-\sin\left(k+\frac{1}{2}x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{3}{2}x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\sin\left[(k+1)+\frac{1}{2}x\right]}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

而且在归纳过渡时，我们已经把原来的$n+1$项，变成只有 2 项，这样针对性更强了。

注意结果的保留形式。所以对于 $n=k+1$，等式也能成立。于是我们就相信了，对于一切正整数$n\geq n_0$，命题$P(n)$均能成立。从而对一切正整数 n，等式都能成立。 □

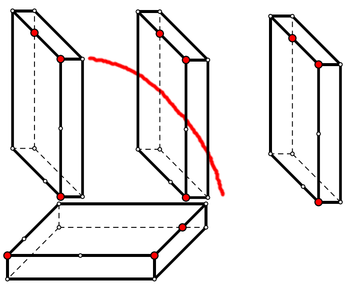


图 26 多米诺骨牌效应

可以告诉大家，这种相信是可靠的，数学归纳法来源于连锁效应（又称多米诺骨牌效应）。

只要能够保证每两块相邻骨牌间的间距均小于骨牌长度，在推倒第一块时，其余的都能相继倒下。

将其运用到数学上，就成了如下的归纳公理：

归纳公理 设$S \subseteq \mathbb{N}_+$，满足：

$(1) 1 \in S; (2)$若$n \in S$，则$n+1 \in S$。那么$S = \mathbb{N}_+$。

这是由皮亚诺提出的关于正整数的五条公理中的一条，为数学归纳法之基础。

第一数学归纳法的证明（i） 记$S = \{n | n \in \mathbb{N}_+, \& P(n)$成立$\}$，则当$1 \in S$，且若$n \in S$，则$n+1 \in S$，那么由归纳公理知，$S = \mathbb{N}_+$。 □

(冯志刚, 2012)

或许你注意到了，我们这里只是证明了起点为$n = 1$时的情况，但当起点不是$n = 1$时呢？

用这条归纳公理来证明第一数学归纳法是不够的。

我们说，它真正的理论依据就是如下的最小数原理：

最小数原理 任何以正整数为元素的非空集合中都存在这最小的元素。

这一原理很容易证明：

设 S 是任一以正整数为元素的非空集合。

如果 S 是有限集合，那么 S 中当然存在最小的元素。

如果 S 是无限集合，我们任取 S 中一个元素 m，并把 S 中所有不大于 m 的元素所构成的子集记为 S_1。则 S_1 是以正整数为元素的非空有界集合，当然其中只有有限个整数，所以其中存在最小的元素 m_0。由于 $m_0 \le m$，而 S/S_1 中的元素都大于 m，所以 m_0 时 S 中的最小元素。 □

现在我们就可以来证明数学归纳法原理了。

用反证法。假设数学归纳法不成立，即已经验证命题$P(n_0)$成立，并且已经证明：对于$k-1 \ge n_0$，只要命题$P(k-1)$成立，就有命题$P(k)$成立，但仍然不能保证对所有的正整数$n \ge n_0$，命题$P(n)$都成立。那么

$$A = \{n \in \mathbb{N}_+ | n \ge n_0, P(n) 不成立\} \ne \emptyset$$

且$n_0 \notin A$。既然A是以正整数为元素的非空集合，其中必有最小元素（最小数原理），我们将改最小元素记做 k，即

$$k = \min\{n | n \in A\}$$

由于$n_0 \notin A$，所以$k \ge n_0 + 1$，故$k - 1 \ge n_0$。

由于$k - 1 < k$，故$k - 1 \notin A$，所以命题命题$P(k-1)$成立，而且已经证明了，只要命题$P(k-1)$成立，就有命题$P(k)$成立，于是$k \notin A$，这与 k 是集合 A 中的最小元素的事实相矛盾。这一矛盾表明**数学归纳法原理**成立！ □

数学在这个方面自圆其说了。所以并不需要再立公理证明，前述的归纳公理仅是为了便于理解而立的罢了。

隐形归纳 有时，人们也直接利用最小数原理解题。此时的解法虽然不是按照归纳法的步骤写出，但其基本思想仍与归纳法相同，故称为隐性归纳。

隐形归纳的一种表现形式是所谓的倾斜式归纳和反向归纳：

如果第 n>1 号命题的成立可以化归一个或数个编号较小的命题的正确性，并且第一个命题成立，则整个系列中的命题都成立。

倾斜式归纳通常以反证法的形式出现，即考察使得命题不成立的最小编号 n，并证

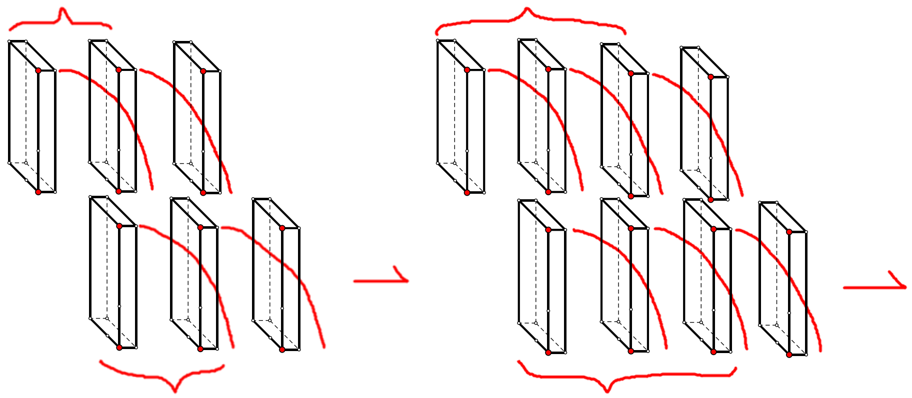
明可以找到一个更小的编号 $m<n$，使得编号为 m 的命题不成立，由此得出矛盾。

2.数学归纳法的变式

本讲目标

- 了解第二数学归纳法。
- 了解起点前移，跨度上的改造。

第二数学归纳法形式（I）



2 推 1　　　　3 推 1

图 27 第二数学归纳法(I)

那么推广至 n 推 1 也是成立的，将得到形式(II)。

第二数学归纳法形式（II）

起步验证后，假设对$1 \le n \le k$，命题均成立，若能推出 P（k+1）成立，则根据数学归纳法原理知，原命题成立。

【例 2】 说 Fibonacci 数列（斐波那契数列，简称 F-数列）是数学大海中一颗璀璨夺目的明珠绝非过誉，这个数列简洁优美，带给我们无尽的遐想。下面就是 F-数列：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ⋯

即由递归方程

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n \ge 1 \\ \quad F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

定义的数列$\{F_n: n \ge 1\}$。

它有一个通项公式：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n), x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

（具体求法见下一章，1.二阶线性递归数列）

但是我们却知道，F_n的每一项都是正整数，不禁狐疑满腹，我们就来证一证吧！

问题：求证由这个通项公式定义的每一项都是正整数。

证明 我们用**第二数学归纳法（I）**证明。

当$n = 1,2$时，$F_1 = 1, F_2 = 1$。

假设当$n = k, k-1$时，F_k, F_{k-1}都是正整数。

那么当$n = k+1$时，

$$
\begin{aligned}
F_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_1^{k+1} - x_2^{k+1}\right) = \left(\textit{怎么用递归关系呢}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_1^{k+1} + \boldsymbol{x_1^k x_2} - \boldsymbol{x_1 x_2^k} - x_2^{k+1} - \boldsymbol{x_1^k x_2} + \boldsymbol{x_1 x_2^k}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(x_1^k - x_2^k\right)(x_1 + x_2) - x_1 x_2\left(x_1^{k-1} - x_2^{k-1}\right)\right] \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_1^k - x_2^k\right)}(x_1 + x_2) - \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_1^{k-1} - x_2^{k-1}\right)} x_1 x_2 \\
&= \boldsymbol{F_k}(x_1 + x_2) - \boldsymbol{F_{k-1}} x_1 x_2
\end{aligned}
$$

而$x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = -1$，$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$，由$F_k, F_{k-1}$皆为正整数，则$F_{k+1}$为正整数。 □

此处出现的一个好的式子，我想称之为**类 Fibonacci 公式**。

类 Fibonacci 公式

$$
\begin{aligned}
a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} + a^k b - a b^k - b^{k+1} - a^k b + a b^k \\
&= \left(a^k - b^k\right)(a + b) - ab\left(a^{k-1} - b^{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

类 Fibonacci 公式姊妹公式

$$
a^{k+1} + b^{k+1} = \left(a^k + b^k\right)(a + b) - ab\left(a^{k-1} + b^{k-1}\right)
$$

我们所证的这个命题，将成为写成高斯形式的基础。

将通项公式改造为

$$
F_n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n
$$

注意到$0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$，则

$$
F_n = \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n = 2k-1 \\ \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + 1, n = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}_+
$$

在**【例 1】**中，法二的数学归纳法对于起步的验证应用了三倍角公式，但实际的直接证法中却没有用到这个公式，那么是不是对这一步的验证可以更简洁呢？

可以的！

我们尝试将起点迁移至$n = 0$。但这样一来，尽管右式的含义是明确的：只需将$n = 0$代入其中，便知$RHS = \frac{1}{2}$。

但左式究竟应当等于什么呢？按我们的愿望，就应当等于$\frac{1}{2}$。不费吹灰之力证明立毕。

但有人对此不理解，认为当$n = 0$时，左式应等于$\frac{3}{2}$，原因：$\frac{1}{2} + \cos 0x = \frac{3}{2}$。但这种

意见是不正确的。

这是因为在原来的等式中，n是作为正整数出现的，并没有打算将n取作 0，所以当$n=0$时，该等式究竟该作何种理解，是需要作补充定义的。

这时就要考虑命题之间的固有关系。在数列中这种固有关系称为递推关系。

$$S_n=\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos nx$$

$$S_{n+1}=S_n+\cos(n+1)x$$

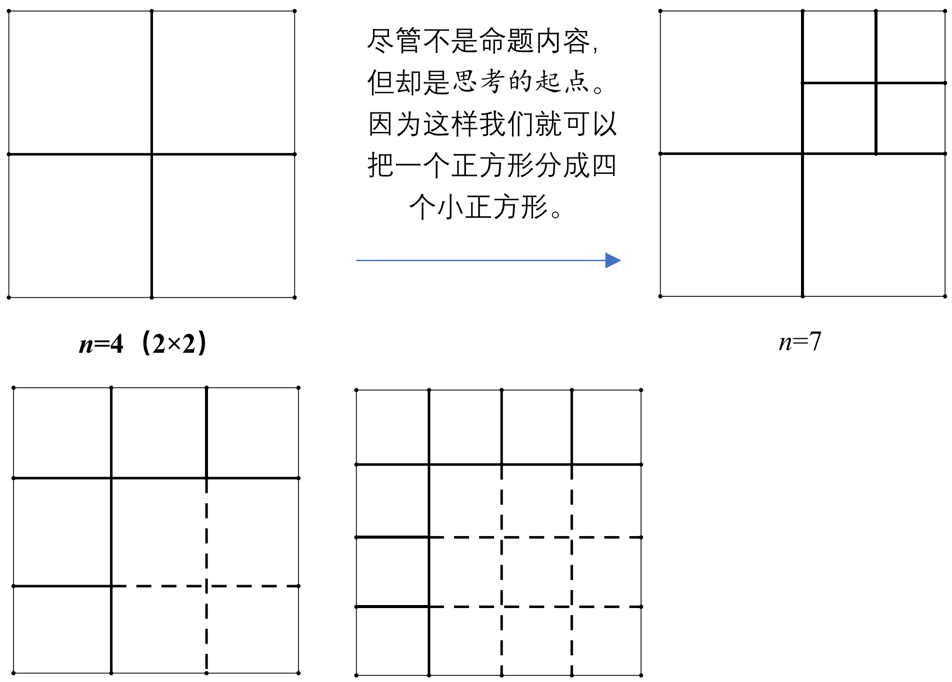
$$S_1=S_0+\cos x\,,S_0=S_1-\cos x=\frac{1}{2}$$

当然，上述过程不必在试卷上写出，只要心中有数即可。

关于跨度上的跳跃。这类技巧一般表现为变一步一跨为大跨度跳跃，其中亦伴随着起点方面的变化。一般来说，采用几步一跨，就应当设几个起点。

【例 3】设n为不小于 6 的正整数。求证：可将一个正方形分成n个较小的正方形。

证明



***n*=4（2×2）** *n*=7

n=6（3×3-3） *n*=8（4×4-8）

图 29 例 3 证明

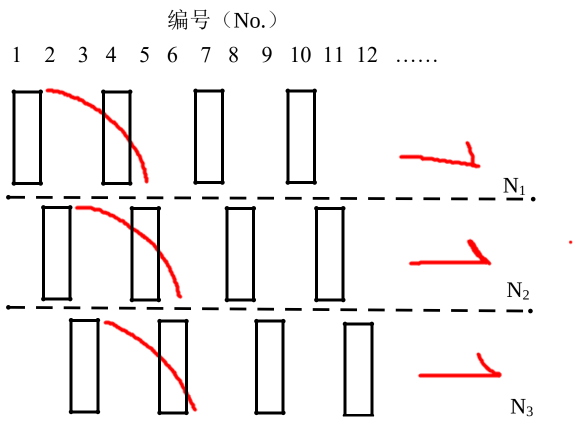


图 28 跨度原理（每个集合内使用第一数学归纳法）

由于跨度为 3，而三个起点已经设好，这个问题已告证毕。

3.从特殊性看问题、在命题上下功夫

本讲目标

- 了解从特殊性看问题的思想在数学归纳法中的应用。
- 了解引理与转化命题。
- 要批判地认识数学归纳法。

一、从特殊性看问题——从头看起

分享一句华罗庚说过的名言：

“学好数学的诀窍就是一个字：退。大胆地退，足够地退，一直退到最简单而不失重要性的地步。”

这段话可谓道破天机，为我们指点出了学好数学最宝贵、最重要的窍门。

在数学归纳法中，最原始而不失重要性的地方，便是开头的几步。这是从特殊性看问题的一种体现。

【例 4】从$2^n\times 2^n$的方格表中任意去掉一个小方格。求证：对$\forall n\in\mathbb{N}_+$，且不论去掉的是哪一个小方格，剩下的部分都可以用形如图所示的角状形拼成。

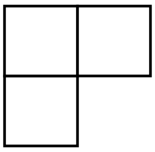


图 30 角状形

分析与证明 （1）当 n=1 时，命题显然。（但这对于下面的归纳假设没有什么帮助。）

我们不妨多看两步。当 n=2 时，既然我们考察的目标是为了替归纳过渡寻找规律，我们来将其分成 4 个 2×2 的。

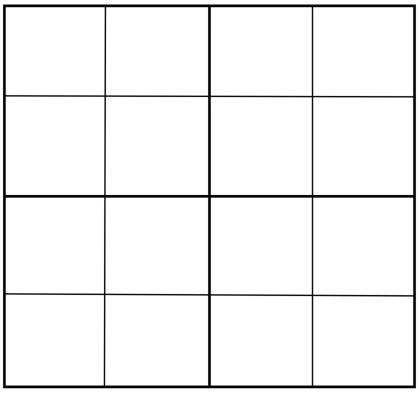


图 31 4×4

那么，任意去掉的那个方格必落在这四个象限中的一个中！（$\left\lceil\frac{1}{4}\right\rceil=1$）

那么其余的象限应如何处理呢？

经过一番探索，我们得到了最终的解决方案：

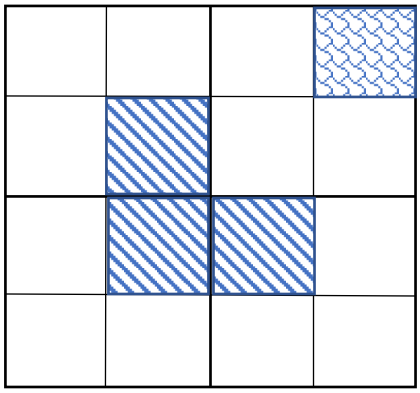


图 32 解决方案

就是在中间加个角状形！其余的部分也就都是角状形了！

那么，过渡就随之完成了！

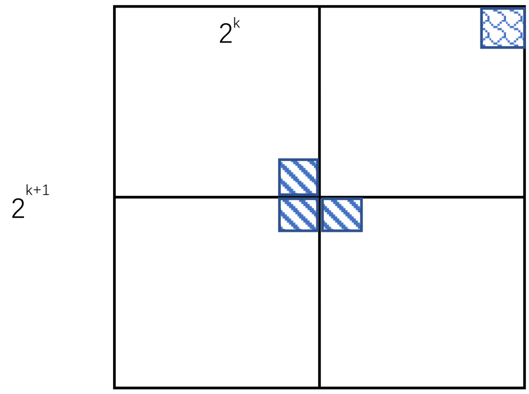


图 33 过渡

由于每个象限根据归纳假设，都是正确的，那么整个也就正确了！

事实上，在很多问题中，如果真正把这些最开头的几步看透了、弄清楚了、想仔细了，则如何恰当地使用归纳假设就知道了，解决整个问题的办法也就有了。

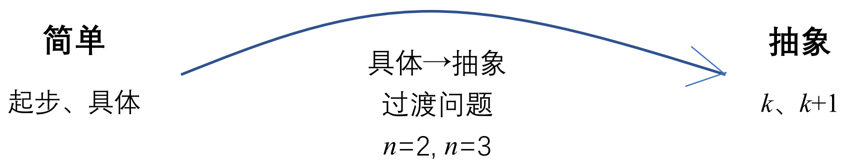


图 34 从特殊性看问题

善于从简单情形去认识复杂事物，善于将抽象理论放到具体而简单的背景之下去考察，是数学上的一种极其可贵的品格，应尽早养成这种品格，久而久之，你便会获益匪浅。

二、 在命题上下功夫

1.辅助命题——引理 （此处略）

2.转化命题

【例 5】证明：在 Fibonacci 数列中，有

$$F_{2n+1}=F_{n+1}^2+F_n^2$$

证明　（*法一，循环归纳*）当 n=1 时，$F_1^2+F_2^2=F_3$成立。

假设当 $n=k$ 时，有

$$F_{2k+1}=F_{k+1}^2+F_k^2$$

当 $n=k+1$ 时，$F_{k+2}^2+F_{k+1}^2=(F_{k+1}+F_k)^2+F_{k+1}^2=F_{k+1}^2+2F_kF_{k+1}+\boldsymbol{F_k^2}+\boldsymbol{F_{k+1}^2}=F_{k+1}^2+2F_kF_{k+1}+F_{2k+1}$

为了证$F_{k+2}^2+F_{k+1}^2=F_{2k+3}$，则证$F_{k+1}^2+2F_kF_{k+1}=F_{2k+3}-F_{2k+1}=F_{2k+2}$。

再用数学归纳法。

（1）当 $n=1$ 时，验证成立。

（2）假设$n=k$时，命题成立，即

$$F_{k+1}^2+2F_kF_{k+1}=F_{2k+2}$$

则当$n=k+1$时，$F_{k+2}^2+2F_{k+1}F_{k+2}=F_{k+2}^2+2(F_{k+1}+F_k)F_{k+1}=2F_{k+1}F_k+2F_{k+1}^2+F_{k+2}^2=F_{2k+2}+F_{k+1}^2+F_{k+2}^2$

欲证$F_{2k+2}+F_{k+1}^2+F_{k+2}^2=F_{2k+3}$，即证$F_{k+1}^2+F_{k+2}^2=F_{2k+3}$

又回到了最初的起点！

为摆脱此困境，还是让我们同时考虑两串命题吧！

记：$P(n):F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1};Q(n):2F_{n+1}F_n+F_{n+1}^2=F_{2n+2}$

已知$P(1),Q(1)$成立。

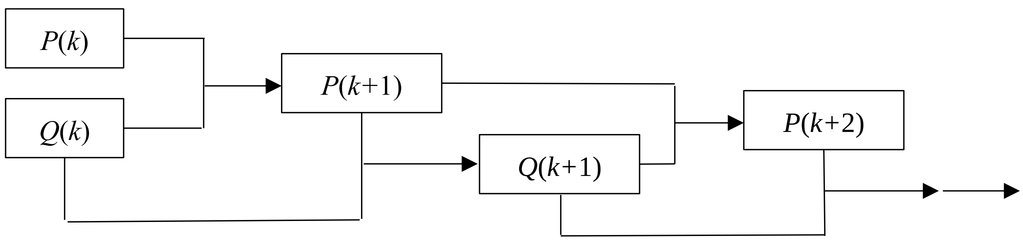


图 35 连环套现象

由图知，两个命题均成立！

像这种两串命题相互依存的现象，并非绝无仅有的。一旦遇到这种连环套，那么破套的最好办法就是两串命题一起考虑！（重证略）

避免这种连环套还有一种方法，就是*加强命题*。

（*法二，加强命题*）**引理：卡西尼（Cassini）恒等式**　在 Fibonacci 数列中，

$$F_{m+n}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n$$

初等证明如下：对 n 用数学归纳法。

当 $n=1,2$ 时，$F_{m+1}=F_m+F_{m-1}=F_mF_{1+1}+F_{m-1}F_1;F_{m+2}=F_{m+1}+F_m=2F_m+F_{m-1}=F_mF_{2+1}+F_{m-1}F_2$，成立。

当 $n=k,k+1$ 时，假设成立。$F_{m+k}=F_mF_{k+1}+F_{m-1}F_k$；$F_{m+k+1}=F_mF_{k+2}+F_{m-1}F_{k+1}$

两式相加，即得　$F_{m+k+2}=F_mF_{k+3}+F_{m-1}F_{k+2}$

引理得证。

在 Cassini 恒等式中，取$m=n+1$立得。 □

有趣的是，由这个引理，还可轻易地导出：$F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$。

(肖果能, 2015, pp. 37-39)

递归数列[8]

陈传理(2017.2)　数学沙龙(I) Log Creative (2017.4)　花老师　(2017.8)

先求出该数列满足的递推关系，然后根据这个递推关系和初始条件求出这数列的表达式。

1.二阶线性递归数列

递归关系为

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}\ , n = 2,3,\dots$$

此处$c_2 \neq 0$.（也就意味着可以$c_1 = 0$，即跨项递归，但$c_2 = 0$时，就变为一阶递归，也就是等比数列。）

称二次方程$x^2 = c_1 x + c_2$为特征方程。此方程有两个根x_1, x_2。

求证　（i）$x_1 \neq x_2$时，$a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n$；（ii）$x_1 = x_2$时，$a_n = (\beta_1 + \beta_2 n) x_{1,2}^n$。其中$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$皆为待定系数。（某年联赛题）

证明　（法一，巧妙的证法）

（i）由根与系数的关系[9]知，

$$x_1 + x_2 = c_1\ , x_1 x_2 = -c_2$$

经换元，使递归关系变为

$$a_n = (x_1 + x_2) a_{n-1} - x_1 x_2 a_{n-2}$$

把方程一变二，得

$$a_n - x_1 a_{n-1} = x_2 a_{n-1} - x_1 x_2 a_{n-2} = x_2 (a_{n-1} - x_1 a_{n-2})$$
$$a_n - x_2 a_{n-1} = x_1 a_{n-1} - x_1 x_2 a_{n-2} = x_1 (a_{n-1} - x_2 a_{n-2})$$

注意到此时可以**构造新数列**[10]了。令$p_n = a_n - x_1 a_{n-1}$，$q_n = a_n - x_2 a_{n-1}$，则上面的式子变为

$$p_n = x_2 p_{n-1}$$
$$q_n = x_1 q_{n-1}$$

这就**化归**[11]成了一阶递归数列的情形。由此即得

$$p_{n+1} = x_2^n p_1, q_{n+1} = x_1^n q_1$$

仅展开左侧，得

$$a_{n+1} - x_1 a_n = x_2^n p_1, a_{n+1} - x_2 a_n = x_1^n q_1$$

消a_{n+1}，得

$$a_n = \frac{x_1^n q_1 - x_2^n p_1}{x_1 - x_2}$$

记$\alpha_1 = \frac{q_1}{x_1 - x_2}, \alpha_2 = \frac{-p_1}{x_1 - x_2}$，至此$a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n$（**设而不求**：$p_1, q_1$）

---

[8] 全文部分摘自《递归数列》(史济怀, 2014, pp. 219-230)，添加了一些个人观点。

[9] **根与系数的关系定理**（又称韦达定理）：n次方程$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$的$n$个复数根分别为$x_1, x_2, \dots, x_n$，则有分解式$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = a_0 (x - x_1) \cdots (x - x_n)$，将此式右边展开并比较对应项系数得$\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}, \cdots, \sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}, \cdots, \sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$。(李尚志, 2014)

[10] **消元**：$a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \xrightarrow[\text{特征方程，新数列}]{} a_n, a_{n-1} \xrightarrow[\text{方程组（二方程）}]{} a_n$。

[11] **化归**：是指把要解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经解决或者能比较容易解决的问题中去，最终获得原问题解答的一种解题策略。（1）复杂→简单；（2）陌生→熟悉；（3）一般→特殊（从特殊性看问题）；（4）原命题→更强命题（加强命题）。

（ii）此时，$p_n=q_n$，由$p_{n+1}=x_2^n p_1$得

$$a_n-x_1a_{n-1}=x_1^{n-1}p_1$$

由$a_{n-1}-x_1a_{n-2}=x_1^{n-2}p_1$知，（对齐）

$$x_1a_{n-1}-x_1^2a_{n-2}=x_1^{n-1}p_1$$

…

$$x_1^{n-1}a_1-x_1^na_0=x_1^{n-1}p_1$$

叠加上述n个式子，即得

$$a_n=x_1^na_0+nx_1^{n-1}p_1=a_0x_1^n+nx_1^n\frac{p_1}{x_1}$$

记$\beta_1=a_0,\beta_2=\frac{p_1}{x_1}$，即得$a_n=(\beta_1+\beta_2n)x_{1,2}^n$。 □

（法二，数学归纳法）此处略。

或许这个推理过程不会再考，但是其中涉及的数列重要思想是值得学习的。

化归；消元；数学归纳法。

【例 1】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_0=3,a_1=9,a_n=4a_{n-1}-3a_{a-2}-4n+2(n\geq 2)$，试求出所有的非负整数 n，使得a_n能被 9 整除。

本题的目标明确：

求出a_n的通项公式。

解 （法一，消代数式）用凑的技巧。

令$a_n=b_n+n^2,b_0=3,b_1=8,b_n=4b_{n-1}-3b_{n-2}-6$。（消 n）

再令$b_n=c_n+3n$,则$c_0=3,c_1=5,c_n=4c_{n-1}-3c_{n-2}(n\geq 2)$。（消常数）

其特征方程是$x^2-4x+3=0\Longrightarrow x=1,3$，故$c_n=u\cdot 3^n+v$。由前两项的信息得，$c_n=3^n+2$。由此得，$a_n=3^n+n^2+3n+2$。

当$n\geq 2$时，$9|a_n\Longrightarrow 9|n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

综上，$n=1,9k+7,9k+8(k=0,1,\dots)$

技巧性较强的问题通常有一些运气。下面介绍一个通常的方法。

（法二，消数列项）易得$a_2=21$，可令$b_n=a_n-a_{n-1}(n\geq 1),b_1=6,b_2=12$

$$b_n=3b_{n-1}-4n+2$$

待定系数，构造等比数列：$b_n-\alpha n-\beta=3[b_{n-1}-\alpha(n-1)-\beta],\alpha=\beta=2$,得

$$b_n-2n-2=3[b_{n-1}-2(n-1)-2]$$

同理得$a_n=3^n+n^2+3n+2$。以下同上。

二阶线性递归数列的题目可以结合数学归纳法操作，而不必求出通项公式。

【例 2】数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_2=7,a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}(n\geq 3)$，求证：对$\forall n\in\mathbb{N}_+,a_{2n-1}$可表示为两个正整数的平方和。

分析与证 先用探索法开路，$a_3=25,a_4=89,a_5=317,a_6=1129,a_7=4021,\dots$而$a_1=1^2+1^2$，注意到$a_3=3^2+4^2,a_5=11^2+14^2,a_7=39^2+50^2$

规律比较隐蔽。

但是应注意方向，若只注意 n，发现是杂乱无章的。

这种方向感或许与经验有关，知识的迁移与应用是重要的。

在数学归纳法一章 3.从特殊性看问题 在命题上下功夫中，我们知道在 Fibonacci 数列

中，

$$F_{2n+1}=F_{n+1}^2+F_n^2$$

这里两个平方根为数列中的项，那么这里是不是也是这个方向呢？

看来单单是项的平方，难以凑成；若是线性组合呢？

通过摸索，我们得到

$$a_3=(a_2-2a_1)^2+(2a_1)^2 \quad a_5=(a_3-2a_2)^2+(2a_2)^2$$

据此猜测，对每个$n\in\mathbb{N}_+$，有

$$a_{2n-1}=(a_n-2a_{n-1})^2+(2a_{n-1})^2$$

为证上式，实际上还需证关于a_{2n}的式子。（因为递归关系中含有这一项）

一方面，

$$a_{2n+1}=(a_{n+1}-2a_n)^2+(2a_n)^2=a_{n+1}^2+8a_n^2-4a_na_{n+1}$$

另一方面，

$$a_{2n+1}=3a_{2n}+2a_{2n-1}=3a_{2n}+2(a_n^2+8a_{n-1}^2-4a_na_{n-1})$$

且$a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}$，用来消去a_{n+1}。

则下式应成立，

$$3a_{2n}=3a_n^2+12a_na_{n-1}-12a_{n-1}^2$$

此即

$$a_{2n}=a_n^2+4a_na_{n-1}-4a_{n-1}^2$$

这是两个互相依赖的命题，可以一起归纳。但不是在 Fibonacci 中出现的“怪圈”。

（1）当 n=2,3 时，验证无误。

（2）当 n=k 时，假设成立，那么当 n=k+1 时，

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=3a_{2n}+2a_{2n-1}=3a_n^2+12a_na_{n-1}-12a_{n-1}^2+2a_n^2+16a_{n-1}^2-8a_na_{n-1}\\&=5a_n^2+4a_na_{n-1}+4a_{n-1}^2\xLeftrightarrow[2a_{n-1}=a_{n+1}-3a_n]{}a_{n+1}^2+8a_n^2-4a_na_{n+1}\\&=(a_{n+1}-2a_n)^2+(2a_n)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2n+2}&=3a_{2n+1}+2a_{2n}=a_{n+1}^2+8a_n^2-4a_na_{n+1}+2a_n^2+8a_na_{n-1}-8a_{n-1}^2\\&\xLeftrightarrow[2a_{n-1}=a_{n+1}-3a_n]{}a_{n+1}^2+4a_{n+1}a_n-4a_n^2\end{aligned}$$

由数学归纳法原理知，原命题成立。 □

2.复数特征根

若特征方程的根为复数根，根据**复数根成对原理**，设两根为

$$x_1=a+b\mathrm{i},x_2=a-b\mathrm{i}$$

写成三角形式，

$$x_1=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),x_2=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta),r=\sqrt{a^2+b^2},\cos\theta=\frac{a}{r},\sin\theta=\frac{b}{r}$$

这时根据二阶线性递归数列原理与棣莫弗定理，可得

$$a_n=\alpha_1r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)+\alpha_2r^n(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta)$$

且

$$a_n=\overline{\alpha_1}r^n(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta)+\overline{\alpha_2}r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$$

两式相加，得

$$2a_n = r^n[(\alpha_1+\overline{\alpha_2})(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)+(\alpha_2+\overline{\alpha_1})(\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta)]$$

记 $\alpha_1+\overline{\alpha_2}=\beta_1+\beta_2\mathrm{i}$（$虚部_1-虚部_2$），则 $\alpha_2+\overline{\alpha_1}=\beta_1-\beta_2\mathrm{i}$（$-\left(虚部_1-虚部_2\right)$）。

（即$\alpha_1+\overline{\alpha_2}=\overline{\alpha_2+\overline{\alpha_1}}$）则

$$\begin{aligned}2a_n &= r^n[(\beta_1+\beta_2\mathrm{i})(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)+(\beta_1-\beta_2\mathrm{i})(\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta)]\\ &= 2r^n(\beta_1\cos n\theta - \mathrm{i}\beta_2\sin n\theta)\end{aligned}$$

即

$$a_n = r^n(\beta_1\cos n\theta - \mathrm{i}\beta_2\sin n\theta)$$

由于是待定系数，故

$$a_n = r^n(\gamma_1\cos n\theta + \mathrm{i}\gamma_2\sin n\theta)$$

<u>复数根成对出现原理</u>

设$a,b\in R, a+b\mathrm{i}$是实系数方程$f(x)=0$的根，即

$$f(a+b\mathrm{i})=0$$

则$a+b\mathrm{i}$也是实系数方程$f(x)=0$的根。

证明 用$f(a+bx)$除以$\boldsymbol{x^2+1}$得商式$q(x)$和余式$c+dx$。而$f(a+bx)$与x^2+1的系数都是实数，故

$$q(x)与c+dx的系数亦为实数。$$

在等式

$$f(a+bx)=q(x)(x^2+1)+c+dx$$

中，将x=i 代入得

$$f(a+b\mathrm{i})=c+d\mathrm{i}=0$$

$c,d\in\mathbb{R}$,故$c=d=0$。则$f(a+bx)=\ q(x)(x^2+1)$。

故$f(a-b\mathrm{i})=q(-\mathrm{i})((-\mathrm{i})^2+1)=0$。 □

这个证明抓住了“变量”的统一性关系（i 和-i 平方后皆为-1）。

(李尚志, 2014, p. 251)

3.高阶线性递归数列

对于一般的 k 阶递推关系：

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}, c_k\neq 0$$

它的特征方程定义为

$$x^k=c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\cdots+c_k$$

（i）若特征方程有 k 个不同的实根$x_1,x_2,\ldots,x_k$，那么

$$a_n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n+\cdots+\alpha_kx_k^n$$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$皆为待定系数。

（ii）若有$r(r<k)$个不同的根$x_1,\ldots,x_r$，它们的重数分别为$m_1,\ldots,m_r$，这里$m_1+\cdots+m_r=k$，则

$$a_n=P_1(n)x_1^n+P_2(n)x_2^n+\cdots+P_r(n)x_r^n$$

这里$P_1(n),P_2(n),\ldots,P_r(n)$分别为$n$的多项式，次数不超过$m_1-1,\ldots,m_r-1$，由初始值$a_0,a_1,\ldots,a_{k-1}$确定。

4.分式递归数列

对于$a_{n+1}=\frac{\alpha a_n+\beta}{a_n+\gamma}$（$\alpha,\beta,\gamma$是常数）类型的分式递归数列，应使用不动点法，先求出分式线性函数$\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}$的不动点，即由$x=\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}$得出的不动点$x_1,x_2$。

若$x_1\neq x_2$，则可得$\left\{\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right\}$是一个等比数列；若$x_1=x_2$，则$\left\{\frac{1}{a_n-x_{1,2}}\right\}$是一个等差数列。(范端喜, 2013, p. 83)

证明

若$x_1\neq x_2$，

$$x=\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}\Longrightarrow x^2+(\gamma-\alpha)x-\beta=0\Longrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\alpha-\gamma\\ x_1x_2=-\beta\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{a_{n+1}-x_1}}{\boldsymbol{a_{n+1}-x_2}}&=\frac{\frac{\alpha a_n+\beta}{a_n+\gamma}-x_1}{\frac{\alpha a_n+\beta}{a_n+\gamma}-x_2}=\frac{\alpha a_n+\beta-a_nx_1-\gamma x_1}{\alpha a_n+\beta-a_nx_2-\gamma x_2}\\&=\frac{(\alpha-x_1)a_n-x_1x_2-(\alpha-x_1-x_2)x_1}{(\alpha-x_2)a_n-x_1x_2-(\alpha-x_1-x_2)x_2}=\frac{(\alpha-x_1)a_n+x_1(x_1-\alpha)}{(\alpha-x_2)a_n+x_2(x_2-\alpha)}\\&=\frac{x_1-\alpha}{x_2-\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{a_n-x_1}}{\boldsymbol{a_n-x_2}}\end{aligned}$$

若$x_1=x_2$，

$$\Delta=(\gamma-\alpha)^2+4\beta=0\Longrightarrow\beta=-\frac{(\gamma-\alpha)^2}{4}$$

$$x_1=x_2=\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

$$a_{n+1}=\frac{\alpha a_n-\frac{(\gamma-\alpha)^2}{4}}{a_n+\gamma}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}-x_{1,2}}-\frac{1}{a_n-x_{1,2}}&=\frac{1}{\frac{\alpha a_n-\frac{(\gamma-\alpha)^2}{4}}{a_n+\gamma}-\frac{\alpha-\gamma}{2}}-\frac{1}{a_n-\frac{\alpha-\gamma}{2}}\\&=\frac{4(a_n+\gamma)}{2a_n(\alpha+\gamma)-\alpha^2+\gamma^2}-\frac{2}{2a_n-(\alpha-\gamma)}\\&=\frac{2[4a_n^2+4a_n(\gamma-\alpha)-(\gamma-\alpha)^2]}{(\alpha+\gamma)[4a_n^2+4a_n(\gamma-\alpha)-(\gamma-\alpha)^2]}=\frac{2}{\alpha+\gamma}\end{aligned}$$

这是常数。在应用时，不一定要使用这个公式，这只是给一个方向，待定系数就能解出来了。

几何二试

宋立功 (2017.7) 林老师 (2017.8)

对于大多数的平面几何题，最巧妙的解法大概是几何证法与三角证法了。在考场上，大概也是节省时间的。正是由于这些原因，宋教授在讲课过程中一直使用这样的方法。

1.基本图形

相对于解析几何证法，纯几何证法或纯三角证法需要基本图形作为支撑，下面即是讲课中涉及的几例。

1.1 角分线定理

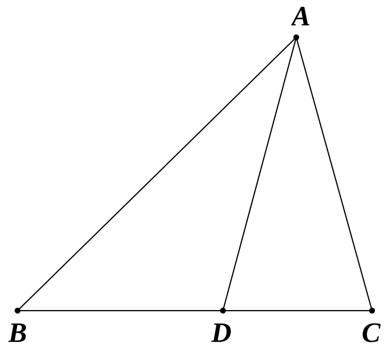


图 36 角平分线定理：$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

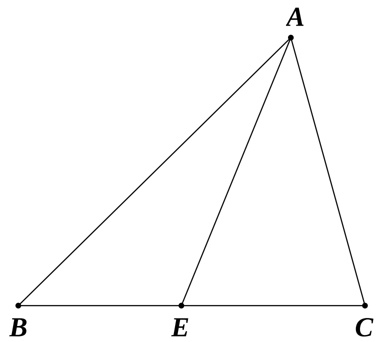


图 37 分角定理：$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle CAD}$

1.2 鸡爪定理

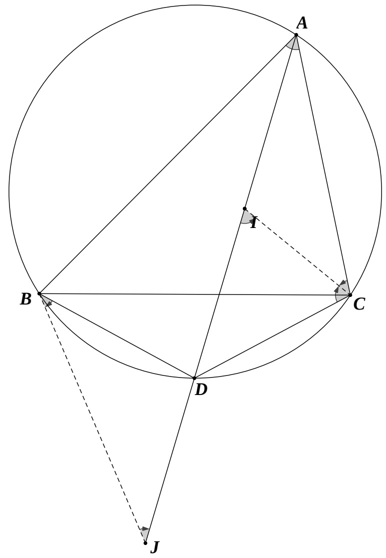


图 38 鸡爪定理：$ID=DC=DB=DJ$

证明 **a.鸡掌**(I 为内心，D 为交点)

$$\angle DIC=\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle C}{2}=\angle BCD+\angle BIC=\angle ICD$$

$$\Rightarrow ID=DC=BD.$$

b.鸡脚(J 为旁心，此处关于 A)

$$\angle JBD=\frac{\pi-\angle B}{2}-\angle CBD=\frac{\pi-\angle B-\angle A}{2}$$

$$\angle DJB=\pi-\frac{\pi-\angle B}{2}-\left(\angle B+\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{\pi-\angle B-\angle A}{2}$$

$$\Rightarrow DB=DJ.$$

□

1.3 双切线弦上比值 （T25）

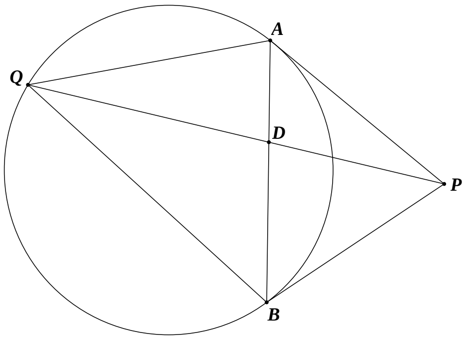


图 39 双切线弦上比值：$\frac{BD}{AD}=\frac{BQ^2}{AQ^2}$

证明

$$\frac{BD}{AD}=\frac{S_{\triangle BPQ}}{S_{\triangle APQ}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BP\cdot BQ\cdot\sin\angle QBP}{\frac{1}{2}\cdot AP\cdot AQ\cdot\sin\angle QAP}$$

$$=\frac{BQ\cdot\sin\angle QAB}{AQ\cdot\sin\angle QBA}=\frac{BQ^2}{AQ^2}$$

倒数第 2 步的依据：$AP=BP$，切线长定理；$\sin\angle QBP=\sin(\pi-\angle QBP)=\sin\angle QAB$，另一边同理；弦切角与圆周角的关系。

倒数第 1 步的依据：正弦定理。 □

1.4 双切线上的托勒密 （T47）

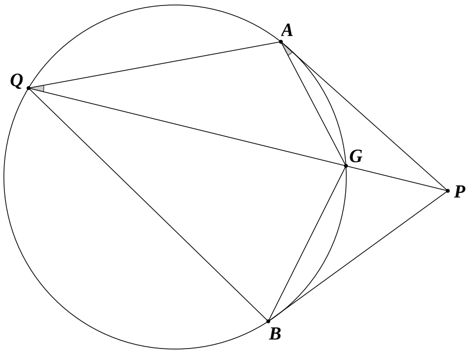


图 40 双切线上的托勒密：$AG\cdot QB=AQ\cdot BG$
(调和四边形 $AQBG$)

证明

$$\angle PAG=\angle AQP\Rightarrow\triangle AGP\backsim\triangle QAP\Rightarrow\frac{AG}{AQ}=\frac{GP}{AP}$$

$$=\frac{PA}{PQ}(PA^2=PG\cdot PQ)$$

同理可得

$$\frac{BG}{BQ}=\frac{GP}{BP}=\frac{GP}{AP}$$

至此得

$$\frac{AG}{AQ}=\frac{BG}{BQ}=\frac{PA}{PQ}=\frac{PB}{PQ}$$

（圆内接四边形对边之积相等的情况） □

1.5 弧中点偶遇相似 （T44）

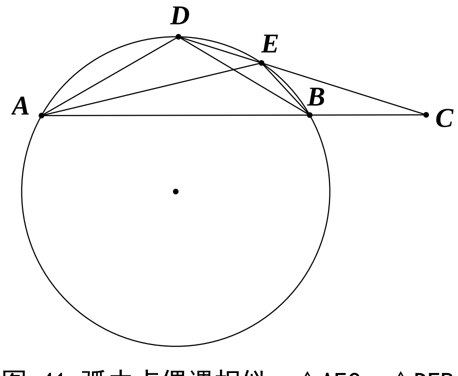


图 41 弧中点偶遇相似：△AEC∽△DEB

证明

$$\angle EDB=\angle EAB$$

$$\angle BEC=\angle DAB=\angle DBA=\angle DEA$$

$$\Rightarrow\angle DEB=\pi-\angle BEC=\pi-\angle DEA=\angle AEC$$

以上两个条件导出：

$$\triangle AEC\backsim\triangle DEB$$

$$DB\cdot BC=AB\cdot BE$$

□

1.6 边线、切线、延长线 （T38，2014）

BD, CD 分别为切线，且 $BD=CD$。

特别地，当$\angle A=60°$时，$\triangle BCD$ 为正三角形。

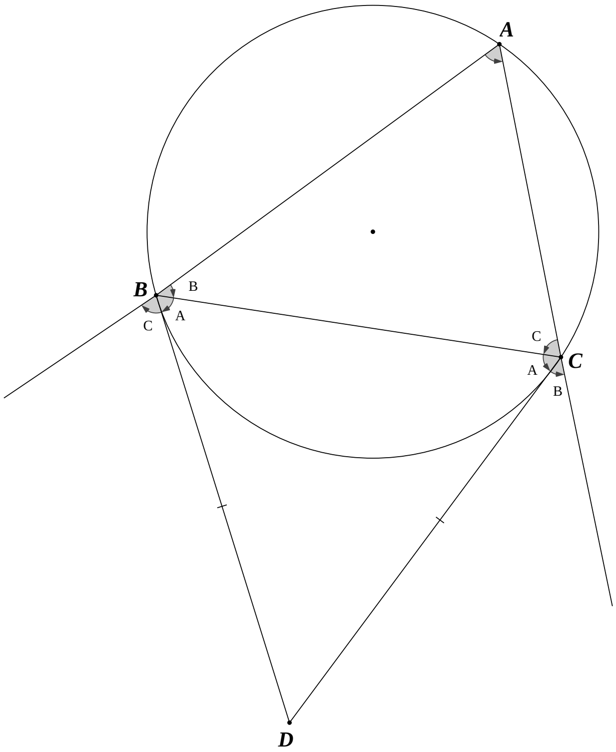


图 42 边线，切线，延长线

1.7 垂三角形（光路三角形）射影点

（T48）

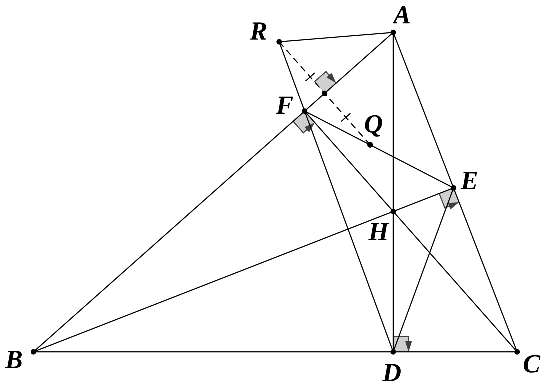


图 43 垂三角形射影点：R,F,D 三点共线。

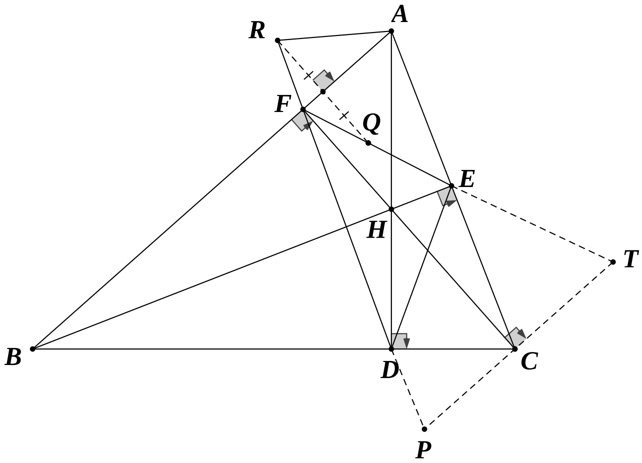


图 44 垂三角形射影点(modified)

证明

$$\begin{array}{ccc} \angle RFA & ? & \angle BFD \\ \| & & \| \\ \angle QFA\text{（射影）} & & \| \\ \| & & \| \\ 90^\circ-\angle EFC & & 90^\circ-\angle CFD \end{array}$$

为了让这个关系成环，下面过 C 作 CF 的垂线，延长 FD 交垂线于 P 点，延长 FE 交垂线于 T 点。

由于 AD,BE,CF 共点于垂心 H，故根据 Ceva 定理，有

$$\frac{\boldsymbol{CE}}{\boldsymbol{EA}}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{\boldsymbol{BD}}{\boldsymbol{DC}}=1$$

由于 PT 与 AB 平行，故

$$\frac{\boldsymbol{CE}}{\boldsymbol{EA}}=\frac{CT}{AF},\frac{\boldsymbol{BD}}{\boldsymbol{DC}}=\frac{FB}{CP}$$

将此代入，即得

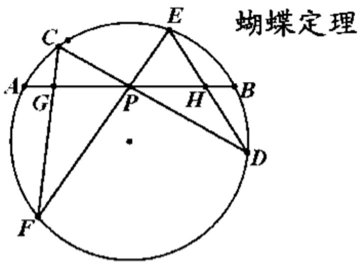
$$\frac{CT}{CP}=1$$

即△FPT 等腰，$\angle EFC=\angle CFD$。

则根据关系链

$$\angle RFA\cancel{?}=\angle BFD.\ \square$$

1.8 蝴蝶定理（Butterfly Theorem） （T4）



$$\frac{AG}{GP}=\frac{AF\cdot\sin\angle AFC}{FP\cdot\sin\angle CFE}=\frac{AF\cdot AC}{FP\cdot CE},$$

$$\frac{BH}{HP}=\frac{BD\cdot\sin\angle BDE}{PD\cdot\sin\angle EDP}=\frac{BD\cdot EB}{PD\cdot CE},$$

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AP}{PD},\quad \frac{AF}{EB}=\frac{FP}{BP}$$

$$\frac{AG}{GP}=\frac{BH}{HP},\ \Rightarrow\ \frac{AG+GP}{GP}=\frac{BH+HP}{HP}$$

图 45 蝴蝶定理

2.综合分析法

在证明过程中，思路的流畅要考合适的方法作为保障。宋教授所推荐的，是“综合分析法”。

一方面，从难度分布上看，中间一般是最难的。像打隧道一样，若从两头一起挖，把目标集中于中间，将有助于问题的解决。

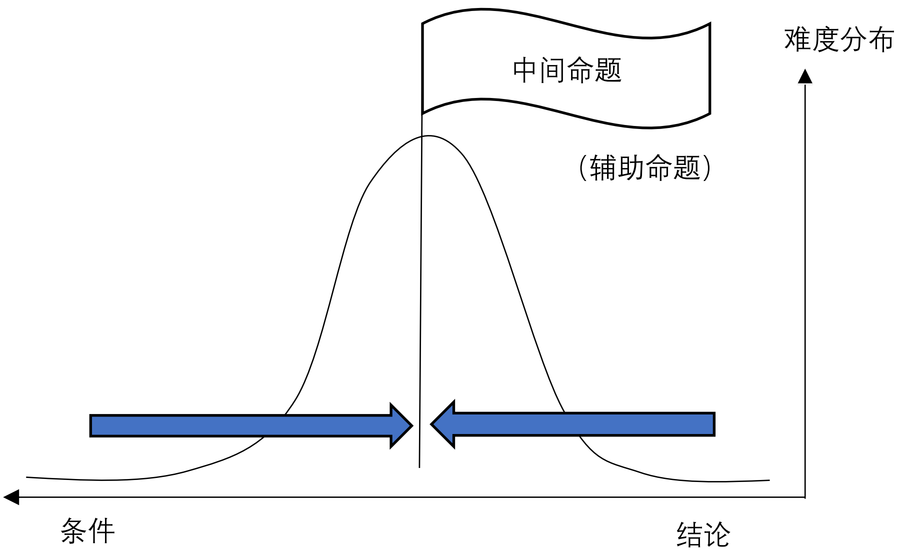


图 46 综合分析法示意

另一方面，条件所能得到的充分条件是很多的，但结论所需要的必要条件却可能只是其中的一小部分。使用“综合分析法”将大大减少路径的选择。

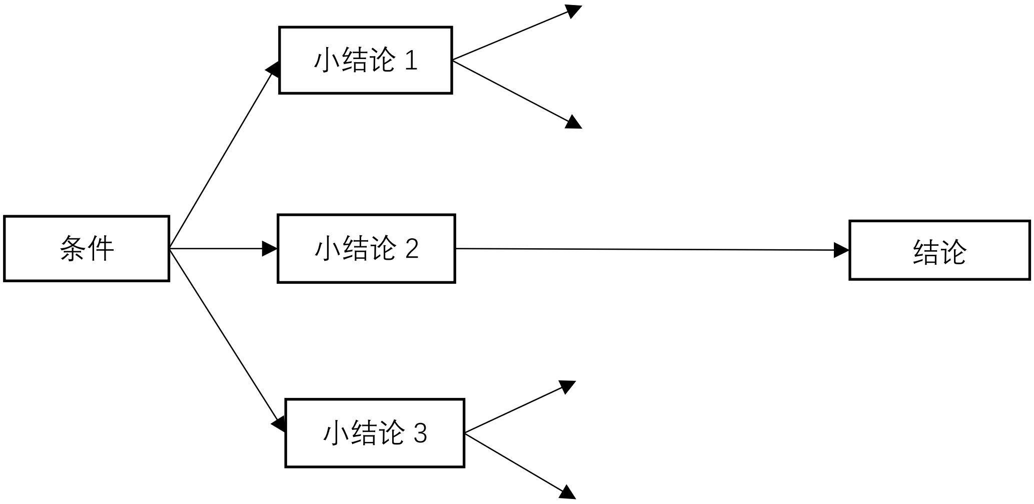


图 47 路径的选择（摘自《帮你学几何》）

用分析法，因为结论成立的理由有限，所以每一步的目的清楚，容易找到证明的路子，就是写起来麻烦一些。用综合法，虽然写起来清晰简明，前因后果，一目了然，可是思路分叉多。究竟那条路能通到结论，常常不是一下子就能看得出来的。看起来，先用分析法探求证题的思路，再用综合法叙述出来，可以扬长避短。 (臧龙光, 2014, p. 43)

鉴于这样的原因，下述说明中尽量采用此法，以展示思维过程。

3.间接证法

（反证法与同一法）

宋教授在讲课过程中着重介绍了间接证法。其威力不容小觑。

3.1 反证法：破坏的对称性——重新利用

一般来说，不能直接从条件推出结论的题，用反证法。另外，不好从条件推出结论的题，还有结论的反面比结论本身更具体、更明确、更简单的题，也可以用反证法。 (臧龙光, 2014, p. 115)

但是宋教授在证明一道题的过程中，却用出了反证法的新花样。先是破坏了对称性，这可能会导致另一半无法正常地发挥作用，但用完反证法后，却能将破坏对称性的假设在与另一半的结合中产生矛盾。

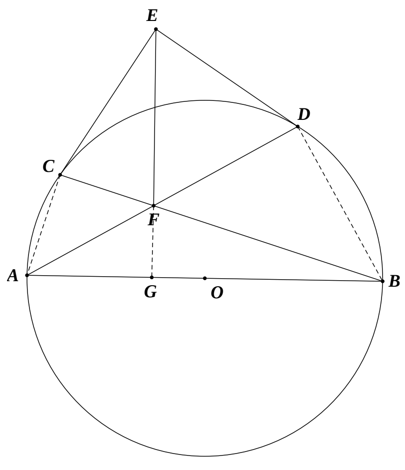


图 48 题九

（T9） AB 是圆 O 的直径，EC、ED 分别是圆 O 的切线，切点为 C,D,连接 BC 和 AD 交于 F，求证：$EF\perp AB$。

$EF\perp AB \quad \Leftarrow \ \angle GFB \quad ? \qquad 90^\circ - \angle FBA$

$\qquad\qquad \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$

$\angle EFC$（对顶角） $\qquad \angle CAB$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

（弦切角=圆周角）$\angle BCE$

$\Leftarrow ED = EC \quad ? \quad EF$

但这一步在纯几何证法中难以下手。（F 为交点；可用解析几何直接证，但还是麻烦）

但注意到

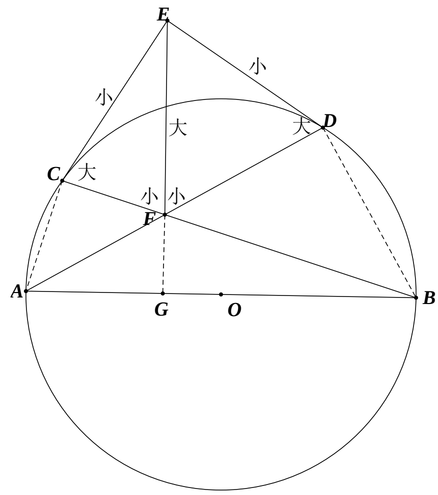


图 49 题九(Modified)

$$\angle \boldsymbol{CFD} = \angle AFB = \angle AFG + \angle GFB$$

$$= 90° - \angle DAB + 90° - \angle CBA$$

$$= \angle CAB + \angle DBA$$

$$= \angle \boldsymbol{ECF} + \angle \boldsymbol{EDF}$$

用反证法。若$\angle EFC < \angle BCE$，则 $EC=ED$ 也要小，EF 会大，$\angle EFD < \angle EDG$，(大边对大角) 两个不等式相加得到

$$\angle \boldsymbol{CFD} = \angle EFC + \angle EFD < \angle \boldsymbol{ECF} + \angle \boldsymbol{EDF}$$

这是矛盾的。若$\angle EFC > \angle BCE$ 同理得到矛盾。故$\angle EFC = \angle BCE$。 □

这样的证法是前所未见的。

3.2 同一法：麻烦条件简单做——证明条件

对符合同一法则的命题，要是直接证明有困难，就可以改正它的逆命题。证明了逆命题是对的，根据同一法则，它的原命题也就被证明是对的了。这种证明方法，叫做同一法。 (臧龙光, 2014, p. 120)

对于一些条件非常棘手的问题，像“交点”（在解析几何中被认为是两个方程联立的结果）之类，经同一法转化后可改证点共线、比例相等的问题。

（某晚做的题,T’65）设$\odot O_1$与$\odot O_2$交于 P,Q 两点，AB 为公切线，A,B 是切点。AP 又交$\odot O_2$于 C，M 为 BC 中点。求证：$\angle MQP=\angle CPB$。 (单墫, 2015, p. 27)

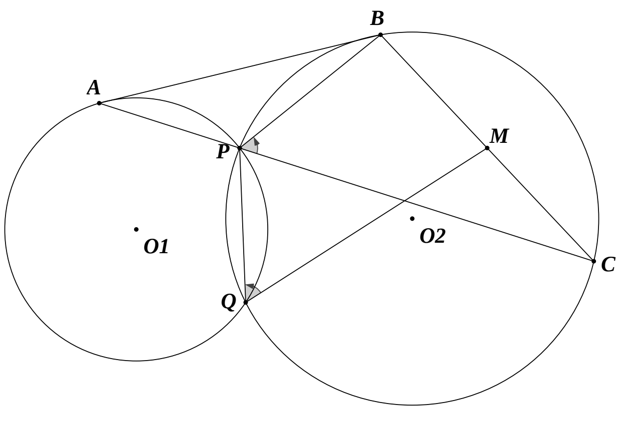


图 50 题’六十五图

分析与证 这一题让我尝到了不用同一法的苦果。

经过 40 分钟的思考，终于作出了下面的辅助线。

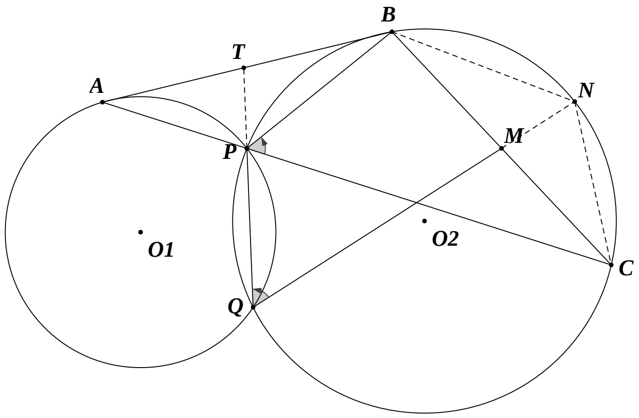


图 51 题’六十五图(Modified)

$\angle MQP=\angle CPB \quad \Leftarrow \quad \angle PCN=\angle CPB \quad \Leftarrow \quad BN//PC$

但我却迟迟没有证出这个结果。

根据以前的经验，我延长了 PQ 与 AB 交于 T，T 是 AB 中点。(根据圆幂定理，T 对 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的圆幂是相等的，皆为 $TP\times TQ$，故 $TA^2=TB^2$.)

然后我就连接了 TM，然后就只要证 BN 与 TM 平行。

但这个似乎更难证！(╯‵□′)╯︵┻━┻

最终我妥协了，但答案还是给了我当头一棒。

对！应！点！

过 B 作 AC 的平行线，交 $\odot O_2$ 于 N，因为

$\angle APB=\angle BNC$， $\angle ABP=\angle BCP=\angle CBN$，故 $\triangle BAP\backsim\triangle BCN$。

连 NQ 交 BC 于 M'，因为

$\angle CNQ=\angle CPQ=\angle APT$，故 *$T$ 与 M' 是对应点！即 $M'=M$!*

故圆内接四边形 $PCNB$ 是梯形，所以是等腰梯形。

从而 $BN//PC$。 □

我认真地看完了下面的解析：

> 本题的困难在于“M 为 BC 中点”这一条件难以直接利用，甚至成了障碍。因此我们绕过它，先作一个与$\triangle BAP$ 相似的$\triangle BCN$。N 其实就是直线 QM 与圆 O_2 的交点，但我们反过来，先确定 N，再证明 NQ 与 BC 的交点是 M。其实这就是“同一法”。同一法的要点就是从容易的地方下手，“拣软柿子捏”。
>
> 对相交的圆，公共弦（及其所在直线）是一定要做出的辅助线。

(单墫, 2015, p. 133)

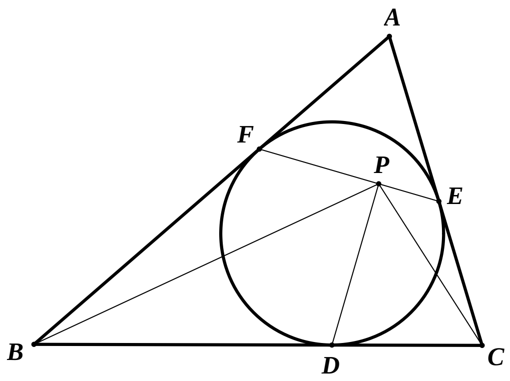


图 52 题十三图

(T13) $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 BC、CA、AB 相切于 D、E、F，$DP\perp EF$ 于 P，证明：PD 平分 $\angle BPC$。

分析

PD 平分 $\angle BPC$

$$\Leftarrow \frac{BP}{PC}=\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{CE}$$

$$\Leftarrow \triangle BFP \backsim \triangle CEP$$

$$\Leftarrow \frac{FP}{PE}=\frac{BF}{EC}$$

（$\angle BFP=\angle CEP$，弦切角=圆周角）

注意，此处不能再找角了，因为你要证的就是角，应该从边考虑。（非角而边）

证明 （法一，同一法）在 EF 上找一点 P'，使

$$\frac{FP'}{P'E}=\frac{BF}{EC}$$

$$\Rightarrow \triangle BFP' \backsim \triangle CEP' \Rightarrow \angle BP'F=\angle CP'E, \frac{BP'}{P'C}=\frac{BF}{CE}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \angle BP'D=\angle CP'D \Rightarrow DP'\perp EF$$

即 $P=P'$。 □

4.三角方法

值得一提的是，三角法也是很重要的方法。

三角，是简单几何构图中计算起来最快的方法，也是覆盖面最广的方法，所以联赛几何经常可以用三角做，三角法的技术含量其实不算很高，大概就是把角写出来（这里可能要用角元梅、赛），然后用正弦、余弦定理表示边，最后算出对应的性质。需要注意的是：和差化积、积化和差等三角变形公式必须非常熟悉，并且在处理具体问题的时候，一般来说乘比加的形式更漂亮，因为更容易消掉一些东西——所以在表示变得时候尽可能少用余弦定理，余弦定理一般是最后代入算。三角法有时要配合同一法。有时候一个角看似不好求，实际上就是已有角的线性表示，代入之后一下就做出来了。所以在三角法陷入僵局的时候可以考虑代入特殊角。 (何天成, 2017, p. 17)

续上一题。

（法二，三角法）

$$PE=DE\cdot\cos\angle DEP=2EC\cdot\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\pi-\angle B}{2}=2EC\cdot\sin\frac{\angle C}{2}\sin\frac{\angle B}{2}$$

$$FP=FD\cdot\cos\angle DFP=2BF\cdot\sin\frac{\angle C}{2}\sin\frac{\angle B}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{FP}{PE}=\frac{BF}{EC}$$

□

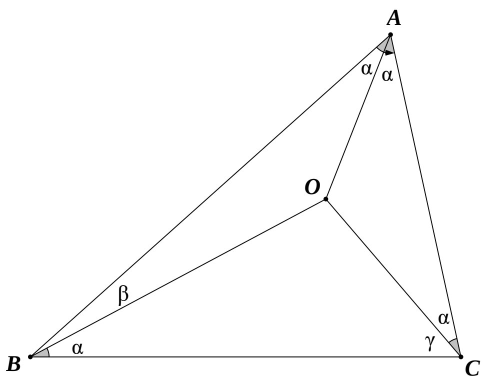


图 53 题六图

（T6） 已知 O 为△ABC 内一点，且满足∠BAO=∠CAO=∠CBO=∠ACO，求证：△ABC 的三边构成等比数列。

证明：（三角法）由角元 Ceva 定理得

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=1$$

即 $$\sin^2\alpha=\sin\beta\cdot\sin\gamma \qquad (*)$$

注意到 $$4\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

即 $$2\alpha+\beta+\alpha+\gamma+\alpha=\pi$$

对(*)式变形，得

$$\begin{aligned}1-\cos 2\alpha=\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)=\\ &=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha+\gamma)]\\ &+\cos(4\alpha)\\ &=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\\ &+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)+\cos 4\alpha\end{aligned}$$

$$\text{LHS}=1+\cos[(\beta+\alpha)+(\gamma+\alpha)]=1+\cos(\beta+\alpha)\cos(\gamma+\alpha)-\sin(\beta+\alpha)\sin(\gamma+\alpha)$$

注意到$1-\cos 4\alpha=2\sin^2 2\alpha$，得$\sin^2 2\alpha=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\Rightarrow a^2=bc$ □

5.角与弧

有一题很有意思，它可以用多种方法完成，既可以纯导角，又可以用弧的运算。

（T36，IMO） 设 P 是△ABC 内部的一点，直线 AP、BP、CP 与外接圆交于 M、K、L，圆在 A 点的切线交 BC 的延长线于 S，若 SA=SP，证明：ML=MK。

证明： ML=MK⟸ $\angle MAL$? $\angle MAK$

$$SP^2=SA^2=CS\cdot BS,\angle PSC=\angle PSB \quad\Rightarrow\quad \triangle PCS\backsim\triangle BPS \quad\Longrightarrow\quad \angle SPC=\angle PBS$$

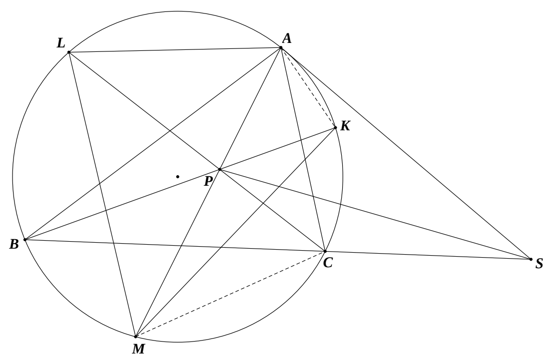


图 54 题三十六图

（法一，导角）

∠MAL ?	∠MAK
‖	‖
∠MCL	∠MAS-∠KAS
‖	‖
∠BCM+∠PCB	∠APS（AP=SP）-∠KBA
‖	‖
∠BKM+∠PCB	∠APK+∠KPS-∠KBA
‖	‖
∠BAM+∠**PCB** ?	∠BAM+∠**KPS**

而$\angle \boldsymbol{KPS}$=$\underline{\angle PBS}$+$\angle PSB$=$\underline{\angle SPC}$（已证）+$\angle PSB$=$\angle \boldsymbol{PCB}$. $\angle MAL=\angle MAK$. □

这个证法比较自然，我就是这样做的。但是中间的导角次数达 12 次，我是画了十张图才搞定的。画这么多张图的原因，是因为单墫说过这样的话：

> 很多线画在同一个图上，形象就不清楚、不鲜明了，所以图应有分有合。解几何题时，应多画几个草图。
>
> 这种草图不一定准确。但这种“形象”已经有助于我们思考了。平面几何正是这样一门科学，它利用未必准确的图形推出准确的结果。
>
> 这未必准确的图形不是完全错误的图形。它像漫画、速写或者中国的写意图。虽然不是照片，却也能反映事物的本质，“得其精髓”。培养学生画这种草图的能力也是很重要的。

(单墫, 2015, p. 99)

（法二，弧的运算与构造平行线）

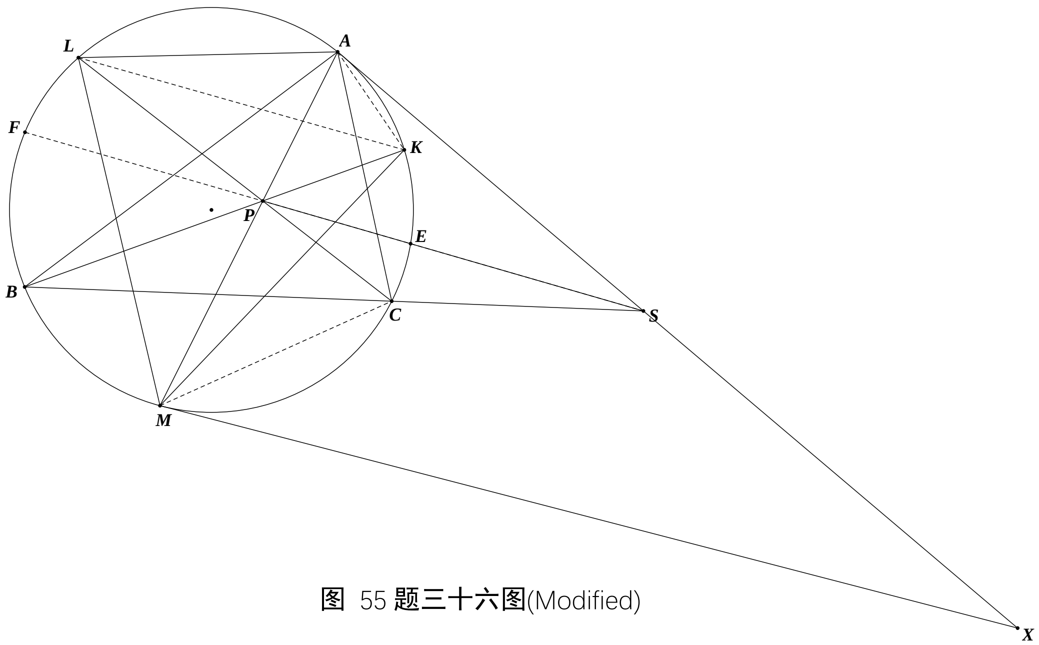


图 55 题三十六图(Modified)

延长 SP，交外接圆于 E,F。过 M 作圆的切线交 AS 的延长线于 X。

由于$\angle SPC=\angle PBS$, 则$\frac{1}{2}\widehat{EC}+\frac{1}{2}\widehat{FL}\overset{m}{\Leftrightarrow}\angle SPC=\angle LPF=\angle PBS\overset{m}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}\widehat{EC}+\frac{1}{2}\widehat{EK}$,故$\widehat{FL}=\widehat{EK}$,

故 $LK//FE$。

$MX=XA, SP=SA\Longrightarrow XM//PS$,即 $XM//FE$。

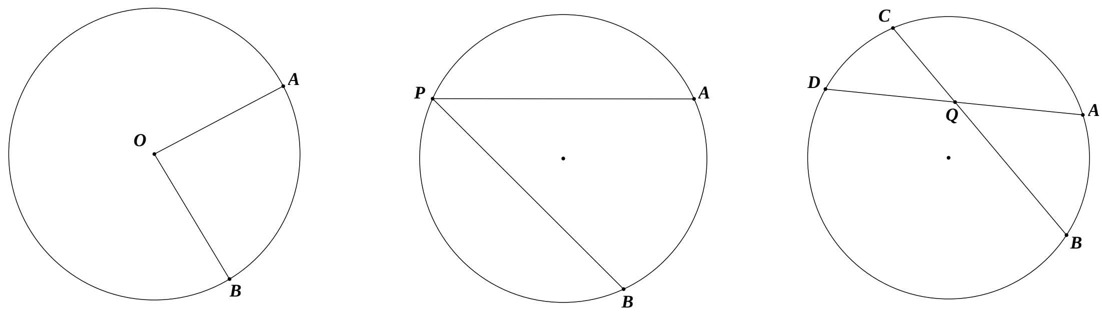
故 $XM//LK$。

而$\frac{1}{2}\widehat{AE}+\frac{1}{2}\widehat{EM}\overset{m}{\Leftrightarrow}\angle ALM=\angle \boldsymbol{PAS}=\angle \boldsymbol{APS}=\angle FPM\overset{m}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}\widehat{AE}+\frac{1}{2}\widehat{FM}$

故$\widehat{FM}=\widehat{EM}$，$M$ 是弧$\widehat{FME}$中点，由于平行，也是弧$\widehat{LMK}$中点，故 ML=MK。 □

这个证法涉及到弧的运算与平行线的构造，实际上，不构造平行线也能通过弧的运算导出结果（法一可以证实这一点），在此略。

关于弧的运算有下面重要的结果：



（i）圆心角$\angle AOB \overset{m}{\Leftrightarrow} \widehat{AB}$

（ii）圆周角$\angle APB \overset{m}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\widehat{AB}$

（iii）弦夹角

$\angle CQD = \angle AQB \overset{m}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\widehat{AB} + \frac{1}{2}\widehat{CD}$

图 56 弧的运算

6.蝴蝶定理

（解析方法）

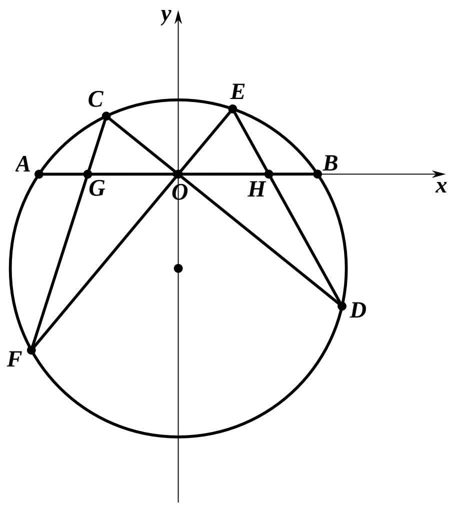


图 57 解析法

如图建立平面直角坐标系。

令直线 CD 的方程为：$y = k_1 x$；直线 EF 的方程为：$y = k_2 x$；圆的方程为：$x^2 + (y + a)^2 = R^2$。那么下式就表示过四点的曲线系：

$$x^2 + (y + a)^2 - R^2 - \lambda(y - k_1 x)(y - k_2 x) = 0$$

一定存在$\lambda = \lambda_1$使得上式表示直线 CF、DE 的方程。

令$y = 0$

则$x^2 + a^2 - R^2 - \lambda_1 k_1 k_2 x^2 = 0 \Longrightarrow x_1 + x_2 = 0$

即$OG = OH$。 □

这种证法的好处在于，这个曲线不一定是圆了，可以扩展至任何二次曲线。甚至是直线系。

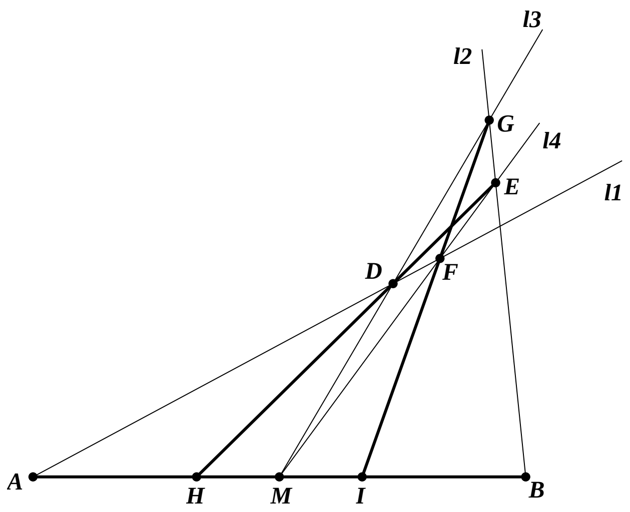


图 58 直线系中的蝴蝶定理

M 是 *AB* 中点，则 *HM*=*MI*。

而蝴蝶定理还有一个更为普遍的形式：

设 *AB* 为一圆任一条弦，*O* 为 *AB* 上任一点，过 *O* 任作两条弦 *CD*、*EF*，连接 *CF*、*ED* 分别交 *AB* 于 *G*、*H*，则有$\frac{1}{OG}-\frac{1}{OH}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}$。

为证明此，把左边化成

$$\frac{OH-OG}{|OH\cdot OG|}=\frac{x_1-x_2}{|x_1x_2|}$$

把原来证明中所设的圆方程更一般化。联立得解。（证明略）

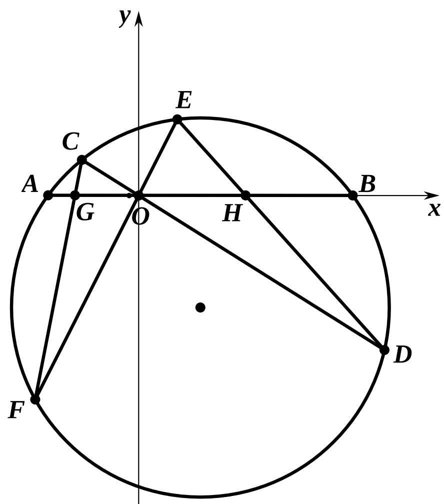


图 59 普遍形式

（T13）凸四边形 *ABCD* 的外接圆圆心为 *O*，已知 *AC*≠*BD*，且 *AC* 与 *BD* 交于 *E*，若 *P* 为 *ABCD* 内部的一点，且∠*PAB*+∠*PCB*=∠*PBC*+∠*PDC*=90°。求证：*O*、*P*、*E* 三点共线。

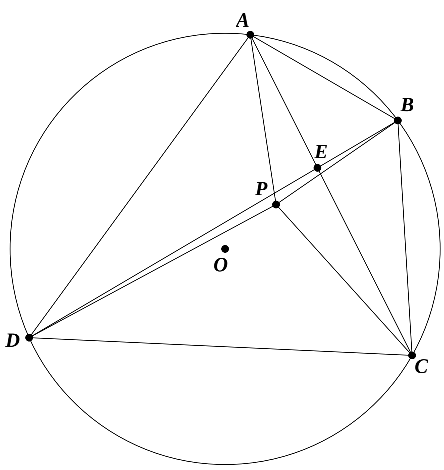


图 60 题 13 图

证明：辅助线大法　　直线 *AP,BP,CP,DP* 交圆 *O* 于 *A', B', C', D'*。直线 *OE* 交圆 *O* 于 *X,Y*。

作出这些辅助线的作用，就是充分利用圆的性质——导角功能。

由于∠*PAB*+∠*PCB*=∠*A'CB*+∠*BA'C'*=90°，则∠*A'BC'*=90°。则 *A'*，*C'*是对径点，过点 *O*。同理 *B'*，*D'*是对径点。

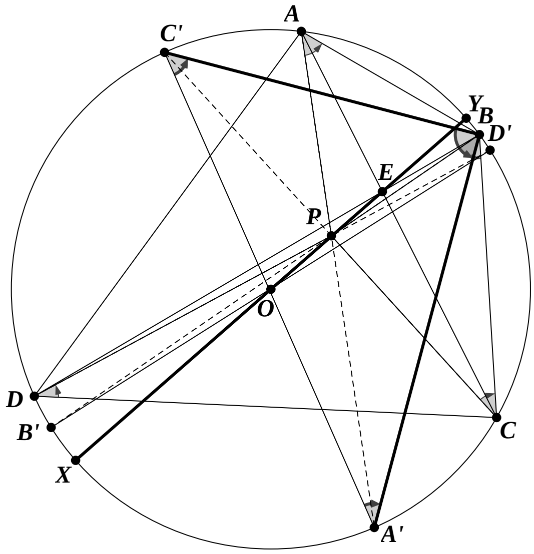


图 61 题 13 图（Modified）

怎么证共线呢？

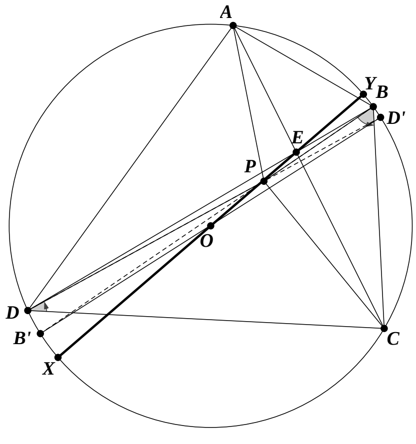
同一法！

设 *XY* 交 *AC* 于 *E'*。下证 *E'*=*E*。

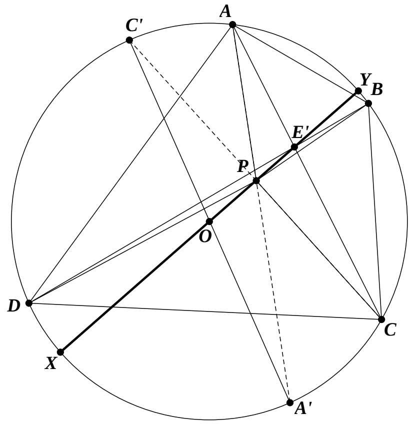
证明方法就是用到上面的蝴蝶定理普遍形式。

对于 *B,B',D,D'*所构成的蝴蝶，*B'D'*与 *XY* 交于 *O*，*BD* 与 *XY* 交于 *E*，有

$$\frac{1}{PX}-\frac{1}{PY}=\frac{1}{PO}-\frac{1}{PE}$$



第一只蝴蝶



第二只蝴蝶

图 62 图形分解

对于 *A,A',C,C'*所构成的蝴蝶，*AC* 与 *XY* 交于 *E'*，*A'C'*与 *XY* 交于 *O*，有

$$\frac{1}{PX}-\frac{1}{PY}=\frac{1}{PO}-\frac{1}{PE'}$$

则$PE=PE'$，是同侧的，则 *E'*=*E*。即 *O,P,E* 三点共线。　□

7.帕斯卡定理

PA 和 *PB* 为圆的切线，两条割线与圆分别交于 *C,D; E,F*，则 *AB, DF, CE* 共点于 *G*。

证明　等价于证明 *BM,CN,DL* 共点于 *G*。

对△*BCD* 用 Ceva 定理，

$$\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC} \;?\; 1$$

方向：往外转化，往里走由于没有确定是否共点，是走不通的。

对于线段比例式，面积法也是好帮手。

$$\mathrm{LHS}=\frac{S_{\triangle CAM}}{S_{\triangle DAM}}\cdot\frac{S_{\triangle DNE}}{S_{\triangle BNE}}\cdot\frac{S_{\triangle BFL}}{S_{\triangle CFL}}$$

$$=\frac{AC\sin\angle CAB}{AD\sin\angle DAB}\cdot\frac{DE\sin\angle DEC}{BE\sin\angle CEB}\cdot\frac{BF\sin\angle DFB}{CF\sin\angle CFD}$$

$$=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{DE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}$$

见本章 1.4 双切线上的托勒密 内容，可得

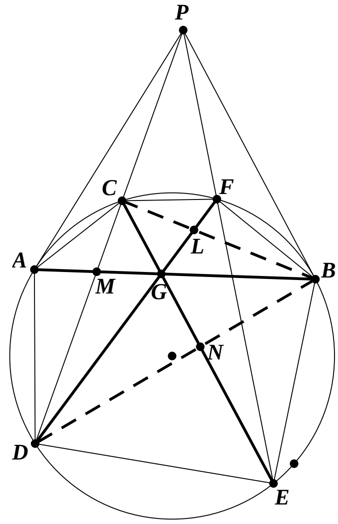


图 63 帕斯卡定理

$$\frac{AC}{AD}=\frac{PA}{PD},\frac{BF}{BE}=\frac{PF}{PB}$$

$$\mathrm{LHS}=\frac{PA}{PD}\cdot\frac{PF}{PB}\cdot\frac{DE}{CF}=\frac{PF}{PD}\cdot\frac{DE}{CF}=1\Leftarrow\frac{PF}{CF}=\frac{PD}{DE}\Leftarrow\triangle PCF\sim\triangle PED$$

这是成立的。 □

这个证明中有一个副产物，关于圆内接六边形对角线共点判别法：

$$\frac{AC}{AD}\cdot\frac{DE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}=\frac{AC}{CF}\cdot\frac{FB}{BE}\cdot\frac{ED}{DA}=1$$

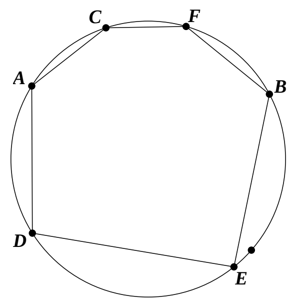
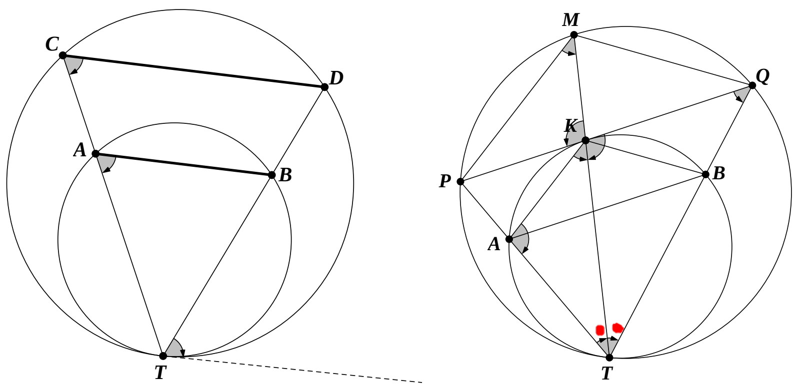


图 64 圆内接六边形

8.内切两圆

两圆内切后，添加线段，会有奇妙的性质。

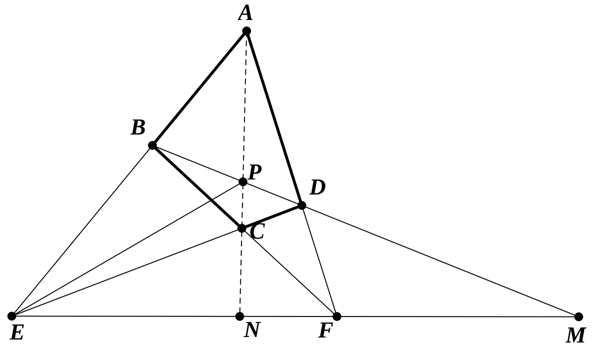


(i)平行线：AB//CD　　(ii) 角平分线 TM

图 65 两圆内切

9.调和点列

如图是一个完全四边形及延长线, 直线 AC 与 BD,EF 的交点 P,N。则出现调和点列 $A,P,C,N;$ $E,N,F,M;$ B,P,D,M。



4

图 66 完全四边形及延长线

证明 对△AEF 用 Ceva 定理，有

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EN}{NF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$$

BDM 截△AEF，用 Menelaus 定理，有

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EM}{MF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$$

比较两式，可得

$$\frac{EN}{NF}=\frac{EM}{MF}$$

根据调和点列的定义，E,N,F,M 为调和点列。

调和点列中的每一点与一点所连的直线形成的线束成为调和线束, 一条直线截线束的交点也成为调和点列。则 BE,BN,BF,BM 交 AN 的点 A,N,C,P 为调和点列，AE,AN,AF,AM 交 BM 于 B,P,D,M 也是调和点列。

性质 对线段 AB 的内分点 C 和外分点 D 以及直线 AB 外一点 P，给出四个论断：（1）PC 时∠APB 的外分点；（2）PD 时∠APB 的外角平分线；（3）C、D 调和分割线段 AB；（4）PC⊥PD。

以上四个论断中，任意选取两个作题设、另外两个作结论组成的六个命题均为真命题。(范端喜、邓博文, 2012, p. 80)

□

等角线专题

叶中豪 (2017.7)

等角线在许多几何题中出现过。这一次，叶中豪就给我们准备了这么一个专题。

1.等角线

在$\angle AOB$中，射线OX和OY使得$\angle AOX=\angle BOY$，则称OX和OY是关于$\angle AOB$的等角线。其中角平分线为整个图形的对称轴。

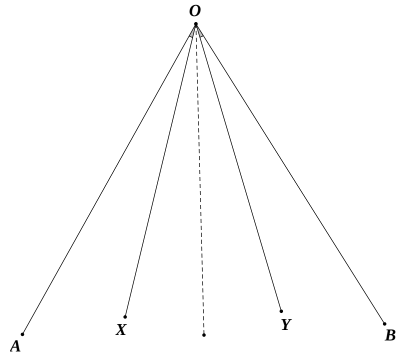


图 67 **等角线**

关于等角线的第一个定理就是史坦纳（Steiner）定理。

Steiner 定理

D,E在BC上，满足$\angle BAD=\angle CAE$.则

$$(1)\frac{BD\cdot BE}{DC\cdot EC}=\frac{AB^2}{AC^2};(2)\frac{BD\cdot DC}{BE\cdot EC}=\frac{AD^2}{AE^2}.$$

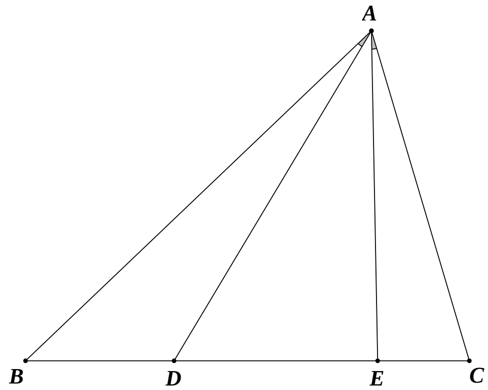


图 68 Steiner **定理**

由于等角线的定义，有了两个相等的角，常常就可以用面积法解决。

用面积证题的基本思想：用不同的方法计算同一块面积（算多次），从而得到一个等式——这样的等式我们把它叫做“面积方程”；在对这个“面积方程”进行整理或变换，以获得我们所要的结果。 (张景中、彭翕成, 2016, p. 6)

那么就可以列出面积方程了：

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{AB\cdot AD}{AE\cdot AC}=\frac{BD}{EC}$$

两点说明：第一个等号把相同角的正弦及$\frac{1}{2}$约掉了；第二个等号是因为为等高的三角形

面积为底边之比。

注意到第（2）小题并没有影响本质，只是把$\triangle ADE$看成原三角形，则AB,AC为其顶角的等角线。

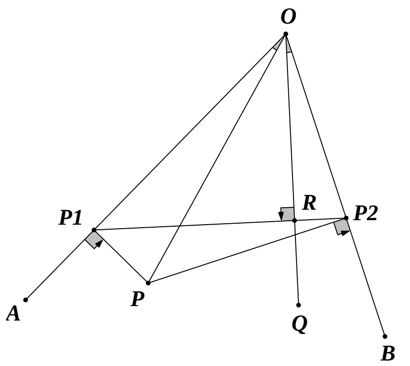
故同理，还有一对等顶角三角形：

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AD}=\frac{BE}{DC}$$

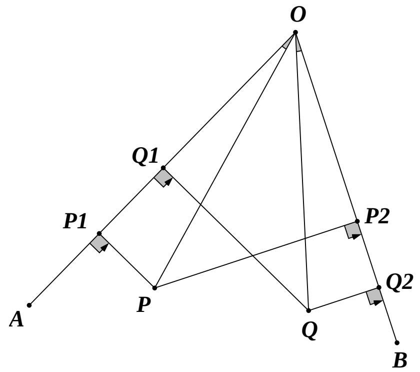
两个式子相乘得（1），相除得（2）。 □

2.等角点

我们把分别在一对等角线上的两点称为一对"**等角点**"（叶中豪的定义）。X，Y点即为一对等角点。等角点有很重要的研究价值，有如下的 6 条重要性质。

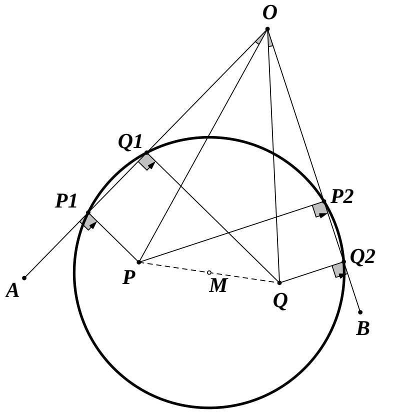


性质 1：**一条等角线上的点** P **与原角的两边垂线的垂足连线** P_1P_2⇔**连线** P_1P_2 **与另一条等角线** OQ **垂直**



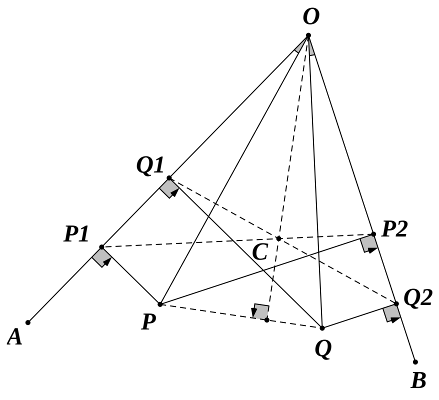
性质 2：**一对等角线上的两点** P,Q **向两边的垂足连线**⇔ $\overrightarrow{PP_1}\cdot\overrightarrow{QQ_1}=\overrightarrow{PP_2}\cdot\overrightarrow{QQ_2}$

性质 3：$OP_1\cdot OQ_1=OP_2\cdot OQ_2$（四边形相似）



性质 4：P_1,P_2, Q_1,Q_2 **四点共圆，圆心为** PQ **中点** M。

性质 5：一对等角线上的两点 P,Q 关于直线 OA,OB 光路和相等。



性质 6：$OC\perp PQ$。

图 69 等角点的性质

其中**性质 6** 为 CMO 讲题（叶中豪出的）。

证明：（*法一*）注意到

$$四边形OP_1PP_2 \backsim 四边形OQ_2QQ_1$$

则对角线交点M,N为相似形的对应点，这直接导致了

$$\frac{OM}{MP}=\frac{ON}{NQ} \Longrightarrow MN \parallel PQ$$

根据性质 1 可得：

$$MP_2 \perp ON, NQ_1 \perp OM$$

故点 C 为$\triangle OMN$ 的垂心，$OC\perp MN$，则 $OC\perp PQ$。 □

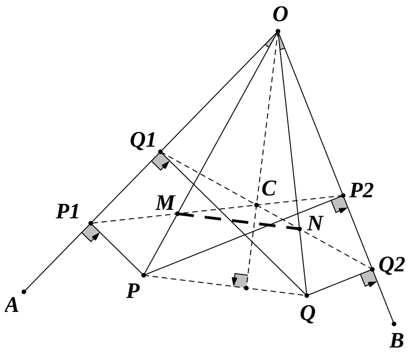


图 71 性质 6 **法一图**

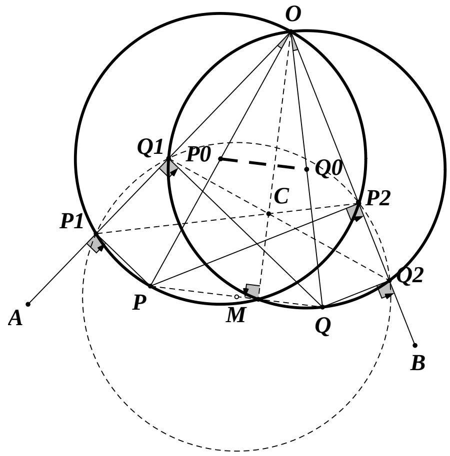


图 70 性质 6 **法二图**

（*法二*）P_0,Q_0 分别为 OP,OQ 的中点，同时也分别为$\odot P_1PP_2$，$\odot Q_1QQ_2$ 的圆心，P_0Q_0 成为连心线。且 $P_0Q_0\perp PQ$。

$OC\perp PQ \quad \Leftarrow \quad OC\perp P_0Q_0 \quad \Leftarrow$ OC 为$\odot P_1PP_2$，$\odot Q_1QQ_2$ 的根轴

$\Leftarrow P_1C\cdot CP_2 = Q_1C\cdot CQ_2$（圆幂相等） $\Leftarrow$ P_1,P_2, Q_1,Q_2 四点共圆（**性质 4**） □

叶中豪在讲解此题是要我们能够“*简化问题 抓住要害*”，这一习惯可以通过上文中单墫所述的“画草图”能力的培养而形成。

3.等角共轭点

一个角的一对等角线或许不够神奇，那么三角形三角的三对呢？

有下面的这样一个定理：

等角共轭定理　　若$\triangle ABC$ 中每个顶角内各作一条射线恰好共点，则它们关于各角的等角线也一定共点。

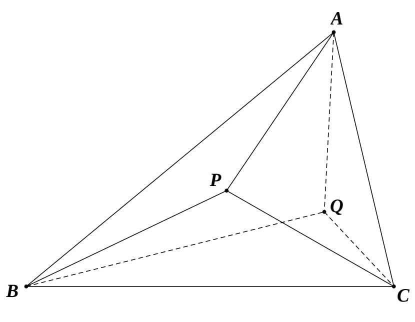


图 72 **等角共轭定理**

下面给出这一定理的最简证明。

证明：

由于 AP,BP,CP 共点于 P，则根据角元 Ceva 定理，有：

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}\cdot\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PCB}\cdot\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA}=1$$

由于等角共轭，则

$$\begin{cases}\angle BAP=\angle CAQ\\ \angle PAC=\angle BAQ\\ \angle ACP=\angle BCQ\\ \angle PCB=\angle ACQ\\ \angle CBP=\angle ABQ\\ \angle PBA=\angle CBQ\end{cases}$$

做替换得：

$$\frac{\sin\angle CAQ}{\sin\angle BAQ}\cdot\frac{\sin\angle BCQ}{\sin\angle ACQ}\cdot\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle CBQ}=1$$

即 AQ,BQ,CQ 共点于 Q。 □

当然，本定理也有其它证法，如 Steiner 定理；利用"等角点"性质证法；纯几何证法。在此不再赘述。

此处的 P，Q 互称为**等角共轭点**。通过等角共轭点可建立一一对应关系，三角形中的常见等角共轭点如下表所示。

表格 4 三角形中等角共轭点

点	等角共轭点
外心 O	垂心 H
内心 I（旁心 I_A,I_B,I_C）	自对应
重心 G	类似重心 G'
费马点 F	等力点 F'
边上的点	顶点
外接圆上点	无穷远点（非欧几何，射影几何）

关于三角形内两点 P,Q 还有一个重要的不等式：Klamkim 不等式。

Klamkim 不等式

$$\sum\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}\geq 1$$

等号成立条件：当且仅当 P,Q 互为**等角共轭点**时。

这个命题就算得上是*几何不等式*了。值得一提的是，几何不等式有时可用面积法巧妙地证出来。

应用面积关系证明不等式，大体上有两类方法：

（1）面积模型法：把所要证的不等式两端用两块面积表示，然后用割补法或面积包含关系证明一块比另一块大。

（2）等式转化法：先利用面积关系导出一些等式，从这些等式出发，或者放大、缩小某一端，或者和某些已知的不等式配合，可以到处所要的不等式。

(张景中、彭翕成, 2016, p. 69)

看到这个不等式右边是 1，有没有什么冲动呢？——把分母化成相同的。那么对于这一题我们可以证明局部不等式——把$\triangle ABC$ 割开，使得不等式左边的每一项都能够大于等于某一个项，使得他们加起来等于 1.

这个想法是能够成功的。

过 P 点向三角形各边作垂线，垂足分别为 D,E,F，连接 QD,QE,QF，那么这就是割开三角形的刀痕了！

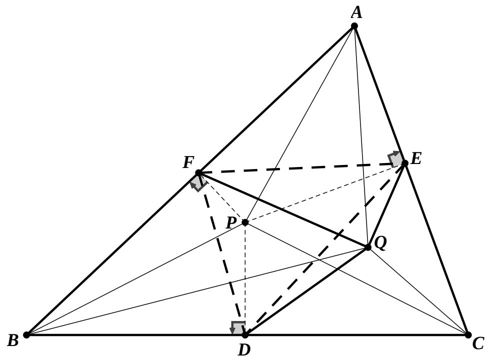


图 73 Klamkim 不等式

$$S_{AEQF} \le \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AQ \quad (\because \sin\theta \le 1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot \sin A \cdot AQ(\text{正弦定理})$$

第一个不等式牵扯到简单四边形（四边互不相交）的面积公式：**简单四边形的面积，等于其对角线之积乘以对角线夹角的正弦之半。** (张景中、彭翕成, 2016, p. 13)

最后一个等式是因为 A,F,P,E 共圆。

于是乎，

$$\frac{S_{AEQF}}{S_{\triangle ABC}} \le \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC}$$

构造成功了！

$$1 = \sum \frac{S_{AEQF}}{S_{\triangle ABC}} \le \sum \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC}$$

□

值得一提的是，等号成立是等角共轭点还没完，当且仅当 P,Q 为老封点（X 点，叶中豪的定义：垂三角的类似重心在原三角形中为老封点）时，三项皆为$\frac{1}{3}$，非常神奇！

4.垂足三角形

在上文 Klamkim 不等式的证明中，$\triangle DEF$ 就是一个关于$\triangle ABC$ 的垂足三角形（pedal triangle）。特别地，当 P 在$\triangle ABC$ 的外接圆上时，$\triangle DEF$ 将成为退化三角形，成为西姆松线。

关于垂足三角形，有两个重要的公式和一个重要的定理。

密克公式

$$\begin{cases} \angle BPC = \angle A + \angle D \\ \angle CPA = \angle B + \angle E \\ \angle APB = \angle C + \angle F \end{cases}$$

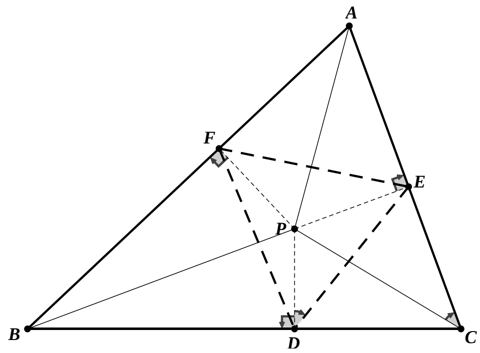


图 74 垂足三角形

Carnot 公式

$$\begin{cases} EF = AP\sin A = \dfrac{AP \cdot BC}{2R} \\ FD = BP\sin B = \dfrac{BP \cdot CA}{2R} \\ DE = CP\sin C = \dfrac{CP \cdot BA}{2R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow EF : FD : DE = (AP \cdot BC) : (BP \cdot CA) : (CP \cdot BA)$$

Carnot 定理

$BD^2-DC^2+CE^2-EA^2+AF^2-FB^2=0 \Leftrightarrow \triangle DEF$ 为垂足三角形。

这个证明可用下面的**等差幂线**解释。

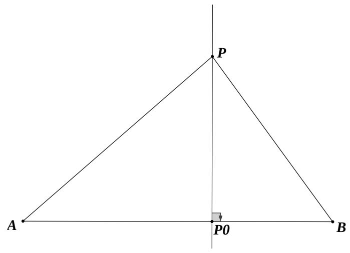


图 75 **等差幂线**

$PA^2-PB^2=P_0A^2-P_0B^2=k$

k 为定值。

由此易证。

（T12）若 P 是$\triangle ABC$ 内一点，$PD\perp BC$，$PE\perp CA$，$PF\perp AB$，记$\odot DEF$ 各与 BC,CA,AB 交于另一点 D',E',F'。求证：过 D',E',F'分别与 BC,CA,AB 的垂线也一定共点。(匈牙利)

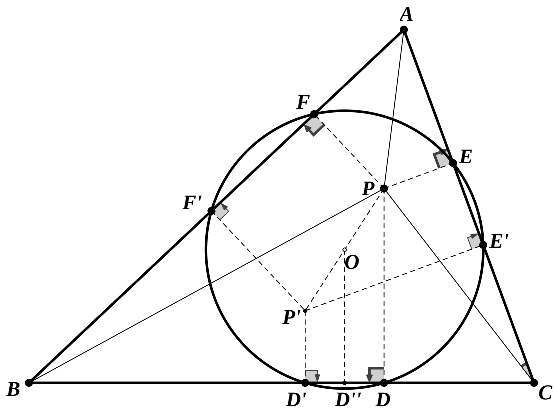


图 76 **题十二图**

叶中豪介绍了单墫的证法。

证明：（*法一*）由 Carnot 定理，得（1）式：

$$BD^2-DC^2+CE^2-EA^2+AF^2-FB^2=0$$

为证结论，需证（2）式：

$$BD'^2-D'C^2+CE'^2-E'A^2+AF'^2-F'B^2=0$$

（1）+（2），并配上

$$-\boldsymbol{2BD\cdot BD'}+2DC\cdot D'C-2CE\cdot CE'+2EA\cdot E'A-2AF\cdot AF'+\boldsymbol{2FB\cdot F'B}=0$$

（圆幂定理）

只需证：

$$(BD-BD')^2-(DC-D'C)^2+(CE-CE')^2-(EA-E'A)^2+(AF-AF')^2-(FB-F'B)^2=0$$

$$\Leftarrow DD'^2-DD'^2+EE'^2-EE'^2+FF'^2-FF'^2=0$$

这是显然的。 □

这就是巧妙地运用了 Carnot 定理的结果。但这一证法美中不足的是，不能推广。

下面是标准答案：

（*法二*）作与 P 点关于 O 点的对称点 P'。

由垂径定理知 DD'的中点 D''与圆心的连线是与 DD'垂直的。故

$PD' \perp BC$，同理可证其他，P'点已被构造。 □

后一种用**构造法解题**是值得学习的。并且这个命题对于 n 边形都是成立的。

处理存在性问题通常有两种类型的论证。一种被称为“非构造性证明”（法一）（主要是反证法，这里是直接证法）。例如，六只苹果放入四个抽屉，我们知道，至少放了两个苹果的抽屉一定存在（如不存在就会导出矛盾！，抽屉原理），但无法断定究竟是哪个抽屉。此所谓“只在此山中，云深不知处”。

另一种论证称为“构造性证明”（法二），就是实际地都找出具有“性质”的“事物”以得出证明。构造性证明通常都有相当高的技巧，要求解题者具有一定程度的知识、经验和技能。(余红兵, 2014, p. 187)

此例中 P'点就是那个构造出来的点。

代数

花老师 (2017.8)

花老师主要讲了含有技巧的不等式证法。

0.通用声明

0.1 在没有特殊声明的情况下，所有题目中的字母表示的皆为正数。

0.2 本文中

$$\sum=\sum_{cyc}\quad\prod=\prod_{cyc}$$

即和号表示轮换和，省略指标意味着是所有的轮换。

0.3 cyc=轮换，sym=完全对称。

0.4 题号中的括号表示内部编号。(对于下一章)

0.5 对其中任一字母做更改时，默认为同时对其他字母做同样更改。

0.6 LHS=Left Hand Side，RHS=Right Hand Side，分别表示原式左，原式右。

1.对称式

题目 1.解不等式:

$$x^4-7x^3+14x^2-7x+1>0$$

解：(法一，杜浩宇解) 能看出因式分解的可直接做。

$$\mathrm{LHS}=(x^2-3x+1)(x^2-4x+1)>0$$

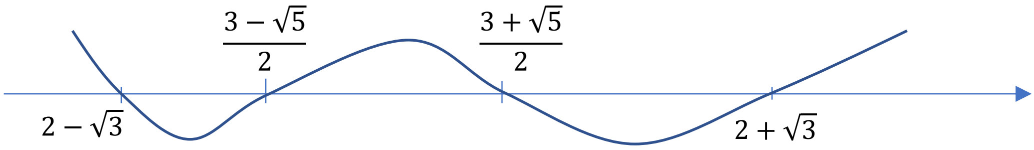


图 77 穿针引线

结果是$(-\infty,2-\sqrt{3})\cup\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(2+\sqrt{3},+\infty)$。

(法二) 关于对称式有一个好的技巧，如下:

同除以x^2，得

$$x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}>0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14>0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14>0$$

解得

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\in(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$$

由此可解得同样的结果。

题目 2.解不等式:

$$\log_2(x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1)>1+\log_2(x^4+1)$$

解: 原不等式等价于

$$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1<2(x^4+1)$$

用换元策略降次, $t=x^2$

$$t^6+3t^5+5t^4+3t^3-2t^2-1<0$$

(法一, 直接因式分解) 待定系数如下:

$$(t^2+at+b)(t^4+ct^3+dt^2+et+f)<0$$

解得原不等式等价于

$$(t^2+t-1)(t^4+2t^3+4t^2+t+1)<0$$

(丁益祥介绍的因式分解除法竖式) 这种方法适用于容易知道一个根的情形, 这里不推荐。但若知道了(t^2+t-1)因式, 则可以这样做:

$$
\begin{array}{rl}
 & t^4 + 2t^3 + 4t^2 + t + 1 \\ \hline
t^2+t-1\ ) & t^6 + 3t^5 + 5t^4 + 3t^3 - 2t^2 + 0 - 1 \\
 & t^6 + t^5 - t^4 \\ \hline
 & \quad 2t^5 + 6t^4 + 3t^3 \\
 & \quad 2t^5 + 2t^4 - 2t^3 \\ \hline
 & \qquad 4t^4 + 5t^3 - 2t^2 \\
 & \qquad 4t^4 + 4t^3 - 4t^2 \\ \hline
 & \qquad\quad t^3 + 2t^2 + 0 \\
 & \qquad\quad t^3 + t^2 - t \\ \hline
 & \qquad\qquad t^2 + t - 1 \\
 & \qquad\qquad t^2 + t - 1 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

图 78 因式分解竖式

(法二, 构造函数)

$$t^6+3t^5+5t^4+3t^3<2t^2+1$$

$$t^3(t^3+3t^2+\mathbf{5}\boldsymbol{t}+\mathbf{3})<2t^2+1$$

$$t^3(t^3+3t^2+\mathbf{3}\boldsymbol{t}+\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{t}+\mathbf{2})<2t^2+1$$

$$(t+1)^3+2(t+1)<\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}$$

拆项使得左右两边各成函数, 令$\varphi(x)=x^3+2x$, 是单调递增的。

$$\varphi(t+1)<\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$t+1<\frac{1}{t}$$

得到了相同的式子。

最终解得:

$$x \in \left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

这看似对称的式子背后果然有对称的关系！

2.创新换元

题目 3.设$a,b,c,d,e \in \mathbf{R}^{+}$，且$abcde=1$，求证：

$$\sum \frac{a+abc}{1+ab+abcd} \geq \frac{10}{3}$$

证明：（法一，普通的换元）拿到这样的题，为了用掉条件，要么齐次化（见下文），要么就换元。可以换成如下形式：

$$a=\frac{x_1}{x_2}, b=\frac{x_2}{x_3}, c=\frac{x_3}{x_4}, d=\frac{x_4}{x_5}, e=\frac{x_5}{x_1}$$

这样一来，

$$\mathrm{LHS}=\sum \frac{\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_4}}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_5}} \xrightarrow[y_i=\frac{1}{x_i}]{} \sum \frac{y_2+y_4}{y_1+y_3+y_5}$$

（法二，创新的换元）但是上面这个做法实际上换了两次元，但真正需要的或许只有一次。

换成如下形式：

$$a=\frac{x_2}{x_1}, b=\frac{x_3}{x_2}, c=\frac{x_4}{x_3}, d=\frac{x_5}{x_4}, e=\frac{x_1}{x_5}$$

仅仅取一个倒数，马上就不一样了！**发现分母能够相同了！**

$$\mathrm{LHS}=\sum \frac{x_2+x_4}{x_1+x_3+x_5}$$

直接到了最后。这一过程用和式或许看不出麻烦程度，但这是 5 项啊，一旦展开，还真的很麻烦。

这个技巧有时候“生死攸关”，见下一章最后部分。

接着证下去：

$$\sum \frac{x_2+x_4}{x_1+x_3+x_5}=\sum \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{x_1+x_3+x_5}-5=\left(\sum x\right)\left(\sum \frac{1}{x_1+x_3+x_5}\right)-5$$

$$\geq \left(\sum x\right)\frac{(1+1+1+1+1)^2}{3(\sum x)}-5=\frac{25}{3}-5=\frac{10}{3}$$

□

3.增项

题目 4.设$x_i \in \mathbf{R}_{+}, i=1,2,\ldots,n$,求证：

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n \geq \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_1}{x_n}$$

分析 看到左边每一项都是 n 次的，就想把右边的每一项也写成 n 次的。

因为我们可以把重要不等式推广为

$$\sum a_i^n \geq n\prod a_i$$

（这可以由下一章中的 5.幂平均单调性原理直接推出。）

我们确实可以这么写：

$$\mathrm{RHS}=\sum\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_4}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{x_1}\le\sum\frac{\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^{n-1}}{n-1}$$

但这是做不下去的。

证明 但如果增加一项，不就是 n 次了吗？

$$\mathrm{RHS}=\sum\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_4}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{x_1}\cdot 1\le\sum\frac{\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\left(\frac{x_3}{x_4}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n+1}{n}$$

这个式子中将重复原不等式左边的每一项（n-1）次，但$\frac{1}{n}$会重复 n 次。故

$$\mathrm{RHS}\le\frac{n-1}{n}\mathrm{LHS}+1$$

注意到

$$\mathrm{LHS}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n\ge n\sqrt[n]{1}=n\Leftrightarrow 1\le\frac{\mathrm{LHS}}{n}$$

代入上式，得

$$\mathrm{RHS}\le\frac{n-1}{n}\mathrm{LHS}+\frac{\mathrm{LHS}}{n}=\mathrm{LHS}$$

□

1 就是一个灵活的增项工具。

题目 5.$abc=1$，求证：对任意整数$k\ge 2$，都有

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\ge\frac{3}{2}$$

证明 对于 k=2，我们易证：

$$\left(\sum\frac{a^2}{a+b}\right)\left(\sum(a+b)\right)\ge\left(\sum a\right)^2\ge?\frac{3}{2}\sum(a+b)\Leftrightarrow\sum a\ge 3$$

这由 AM-GM 不等式是易证的。

但对于一般的情况呢？

我们要想办法把 k 次幂摘掉。

$$\sum\left(\frac{a^k}{a+b}+\frac{a+b}{4}\right)$$

这样用 AM-GM 不等式能把分母摘掉了；

$$\sum\left(\frac{a^k}{a+b}+\frac{a+b}{4}+\frac{1}{2}\times(k-2)\right)$$

这样就有 k 项了，用 AM-GM 不等式后，

$$\sum\left(\frac{a^k}{a+b}+\frac{a+b}{4}+\frac{1}{2}\times(k-2)\right)\ge\sum k\sqrt[k]{\frac{a^k}{4*2^{k-2}}}=\sum\frac{ka}{2}$$

这样一来，

$$\text{LHS}=\sum\left(\frac{a^k}{a+b}\right)\geq\sum\left(\frac{ka}{2}-\frac{a+b}{4}-\frac{1}{2}\times(k-2)\right)=\frac{k\sum a}{2}-\frac{\sum a}{2}-\frac{3(k-2)}{2}$$

$$=\frac{(k-1)(\sum a-3)}{2}+\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}$$

这就是增项的威力！对于中间的构造是需要时间摸索的。

4.函数方程

花老师也讲了一些函数方程题。

题目 6.设$f(x)$定义在（0，+∞）上且满足①对于$x>0$，有$f(x)\cdot f\left[f(x)+\frac{1}{x}\right]=1$，②$f(x)$在（0，+∞）上单调递增，则$f$（1）=__________。

对于函数方程题，有一种做法就是换元。

令$a=f(1)$，则原关系中令$x=1$得

$$f(1)\cdot f[f(1)+1]=1\Leftrightarrow af(a+1)=1\Leftrightarrow f(a+1)=\frac{1}{a}$$

现在我们得到了$f(a+1)$，我们再令原关系中$x=a+1$得

$$f(a+1)\cdot f\left[f(a+1)+\frac{1}{a+1}\right]=1\xrightarrow[f(a+1)=\frac{1}{a}]{}\frac{1}{a}\cdot f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2a+1}{a(a+1)}\right)=a=f(1)$$

现在两边都是函数了！根据单调关系：

$$\frac{2a+1}{a(a+1)}=1$$

解得

$$f(1)=a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

这里有个容易错的点：若$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则

$$f(a+1)=f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}=f(1)$$

这与单调性是矛盾的。故

$$f(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

题目 7(IMO Short Lists).$f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$，对$\forall x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|\leq 1$，

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right)$$

求证：$f(x)$是周期函数。

证明 要注意到$\frac{13}{42}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$，并进行整理得到下面比较漂亮的关系：

$$f\left(x+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-f\left(x+\frac{1}{6}\right)=f\left(x+\frac{1}{7}\right)-f(x)$$

有没有令新函数的冲动?

令$g(x)=f\left(x+\frac{1}{7}\right)-f(x)$，则上式成为:

$$g\left(x+\frac{1}{6}\right)=g(x)$$

那么$g(x)$是周期函数（总算靠上边了），它的一个周期是$\frac{1}{6}$。

根据周期的定义，1 也是它的一个周期。这里很关键，因为只盯着$\frac{1}{6}$这样的一个周期是不会有下一步的动作的，1 算是$\frac{1}{6}$和$\frac{1}{7}$的一个公倍数了，这是有启发意义的一步。

$$g(x+1)=g(x)\Leftrightarrow f\left(x+\frac{1}{7}+1\right)-f\left(x+\frac{1}{7}\right)=f(x+1)-f(x)$$

这里把$\frac{1}{6}$这个元消掉了!

"故伎重演"。令$h(x)=f(x+1)-f(x)$，则

$$\mathrm{h}\left(x+\frac{1}{7}\right)=h(x)$$

1 也是它的一个周期。故

$$h(x+1)=h(x)\Leftrightarrow f(x+2)-f(x+1)=f(x+1)-f(x)$$

这个形式好漂亮啊！怎么往下做呢?

继续赋值！可得

$$\begin{aligned}f(x+n+1)-f(x+n)=\cdots=f(x+3)-f(x+2)=f(x+2)-f(x+1)\\=f(x+1)-f(x)\end{aligned}$$

这里有一个背景:

设f为任一函数，定义*差分算子*Δ为

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$

称它为f的一阶差分或f的一阶差分在x处的值。 (史济怀, 2014, p. 287)

我们原来的式子就成为

$$\Delta f(x+n)=\cdots=\Delta f(x+2)=\Delta f(x+1)=\Delta f(x)$$

则

$$n\cdot\Delta f(x)=f(x+n+1)-f(x)\in[-2,2]\quad(|f(x)|\leq 1)$$

这是要出事的！当$n\to\infty$时，都要成立，故$\Delta f(x)=0$，即$f(x)$是周期函数，它的一个周期是 1。 □

这一题的过程是想当漂亮的。但是每一步都是颇有难度的。

函数方程，是一个中国考察得比较少的方向，但是在 IMO 预选题代数里往往占据"半壁江山"。个人觉得函数方程是代数里很难提高的部分，不同题目的处理方法也不太有共通性。虽说本质上就是不断代入，但也有一些技巧，比如寻找函数方程的单调、单射满射等性质；考察函数的值域，或者取函数的等于目标函数的点的集合，刻画集合的性质以证明是全集；适当给出变元间的关系使得等号两边部分项相等而消去；把较复杂的复合函数代入，结合之前的结论变形消元等等。 (何天成, 2017, p. 16)

5.数列

花老师讲了一些裂项的数列计算。

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

$$n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)}{3}$$

类似的，

$$n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$

推而广之，

$$n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+k)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+k+1)-(n-1)n(n+1)\cdot\cdots\cdot(n+k)}{k+2}$$
$$\Rightarrow (k+2)A_{n+k}^{k+1}=A_{n+k+1}^{k+2}-A_{n+k}^{k+2}$$
$$n\cdot n!=(n+1)!-n!$$
$$\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

有一个数列求和是值得注意的。

题目 8.设 n 是不小于 2 的正整数，求证：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

这是分组求和上场了。

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

变成了连续项的求和！由 Cauchy 不等式知

$$\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^2\le(1\times n)\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)<n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

最后一个不等号用到了裂项求和，两边开平方后证毕。 □

事实 1. 该数列的极限为 ln2≈0.69。

事实 2. 中间导出的结果是 Catalon 恒等式。而关于级数

$$S=\sum_{k=1}^{\left[\frac{2p}{3}\right]}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

$p>3$ 是素数，p 整除 S 的分子。这曾作为 IMO 题。

$$S=\sum_{\frac{p}{3}<k<\frac{2p}{3}}\frac{1}{k}=\sum_{\frac{p}{3}<k<\frac{p}{2}}\frac{1}{k}+\sum_{\frac{p}{2}<k<\frac{2p}{3}}\frac{1}{k}=\sum_{\frac{p}{3}<k<\frac{p}{2}}\frac{1}{k}+\sum_{\frac{p}{3}<k<\frac{p}{2}}\frac{1}{p-k}=p\sum_{\frac{p}{3}<k<\frac{p}{2}}\frac{1}{k(p-k)}$$

$p\nmid k(p-k)$，故上式分子中因数 p 不会约去，即 p 整除 S 的分子。（柯召、孙琦, 2011, pp. 46-47）

不等式

陈 计 (2017.5，2017.7) 林老师（2017.8）

在不等式的解题之中，借用陈计的话说，“每一步都生死攸关”。因为在写下不等号的时候，就有可能放过头了。这样一来，接着做下去就没分了。

对于陈计这样一个研究不等式的人来说，他的经验就是**“暴解才是王道”**。

当然，“暴解有法，取之有道”。

1.齐次化

Problem 1（4594）.求证：

$$\left(\sum a-abc\right)^2\le\prod(1+a^2)$$

分析：关于等价形式的讨论　　将 a 换成$\frac{a}{t}$，可得

$$\left(t^2\sum a-abc\right)^2\le\prod(t^2+a^2)$$

此式中令 $t=1$，将变回原式。说此两式等价是因为反例的存在是同时的。

转化为后一式时，齐次化就完成了。但本题可不必齐次化。

要点：关于不等式

$$\sum x^2\ge\sum yz$$

(可用均值不等式，三式累加得到：

$$\frac{y^2+z^2}{2}\ge yz$$

)

但是稍加变形，将 x 转为$\frac{1}{a}$，得到

$$\sum b^2c^2\ge abc\sum a$$

整合一下：

$$\left(\sum bc\right)^2\ge 3abc\sum a$$

这还不是最隐蔽的，再把 bc 换成 x，变成：

$$\left(\sum x\right)^2\ge 3\sum yz$$

这样一来，一个不等式变成了三个不等式，但它们却是同根源的！

证明：演示陈计眼中的暴解

$$\mathrm{LHS}=\left(\sum a\right)^2-2abc\left(\sum a\right)+a^2b^2c^2=\sum a^2+\mathbf{2}\sum \boldsymbol{bc}-\mathbf{2}\boldsymbol{abc}\left(\sum \boldsymbol{a}\right)+a^2b^2c^2$$

$$\mathrm{RHS}=\mathbf{1}+\sum a^2+\sum \boldsymbol{b^2c^2}+a^2b^2c^2$$

$$\text{RHS}-\text{LHS}=\left(\sum bc\right)^2-2\sum bc+1=\left(\sum bc-1\right)^2\geq 0$$

□

熟练地运用和号暴解，是一大关键。

Problem 2（6302）.求：

$$\sum a^2=1\ \Rightarrow \sum a(a+b)(a+b+c)\leq M,\qquad M\geq ?$$

解：使用齐次化策略

原式等价于

$$\sum a(a+b)(a+b+c)\leq M\left(\sum a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

齐次化的好处在于，不仅把原不等式变成无条件不等式，（在某些情况下，齐次化的式子也可以变为条件不等式，条件为完全对称式。）而且在随后的暴解中，将更好的消去一些项目。

在这一题，就不得不思考如何对最值讨论。

分析：竞赛层次的最值猜测

sym. $yz+zx+xy$

cyc. $y^2z+z^2x+x^2y$

表格 5 关于$x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$的不等式

sym.	cyc.
$x_1,\quad x_2=\cdots=x_n=1$ 求导，猜测。可不妨设顺序。	1.$x_1=x_2=x_3$ 2.$x_1=0$，$x_2=1$，x_3,求导。可设最大者。

在此，令$a=b=c=1,M=2\sqrt{3}$.

要点：一个重要的恒等式

$$\sum a^2-\sum bc=\frac{1}{2}\left[\sum(a-b)^2\right]$$

证明略。

2.柯西不等式

分离器（Cauchy）

Cauchy 不等式：（1800 年）

$$\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)\geq\left(\sum\sqrt{x_iy_i}\right)^2$$

等号成立条件：当且仅当

$$\frac{x_i}{y_i}=\lambda$$

（i=1,2,……,n），λ为常数。

常规的使用在此就不介绍了，下面介绍几个特殊情况。

Problem 3.求证：

$$\sum\frac{x^2}{y^2+z^2+yz}\geq 1$$

尝试使用 Cauchy 不等式，失败了。

分析：失败的原因

表格 6 Cauchy 不等式的放缩度

等号取得时(赋值)	x	y	z
值	0	1	1
加数(参照)	$\frac{x^2}{y^2+z^2+yz}$	$\frac{y^2}{z^2+x^2+zx}$	$\frac{z^2}{x^2+y^2+xy}$
值	0	1	1
除数(系列 1)	y^2+z^2+yz	z^2+x^2+zx	x^2+y^2+xy
值	3	1	1
除数×分子(系列 2)	$x^2(y^2+z^2+yz)$	$y^2(z^2+x^2+zx)$	$z^2(z^2+x^2+zx)$
值	0	1	1

可见当乘系列 1 的因子时，是与参照逆着走的，这在 Cauchy 不等式中是及其危险的。应乘系列 2 的因子。

$$\sum\frac{x^2}{y^2+z^2+yz}\geq\frac{(\sum x^2)^2}{\sum x^2(y^2+z^2+yz)}=1+\frac{\sum x^4-\sum x^2yz}{2\sum y^2z^2+\sum x^2yz}\geq 1$$

其中最后一步用了 Muirhead 定理，见下文。

Problem 4（9207）.求证：

$$\sum ab=3\Rightarrow\sum\frac{1}{(a+b)^2+4}\leq\frac{3}{8}$$

证明：反向 Cauchy 技术

$$\sum\frac{1}{(a+b)^2+4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sum\frac{(b+c)^2}{(b+c)^2+4}\leq\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\frac{[\sum(b+c)]^2}{\sum[(b+c)^2+4]}=\frac{3}{4}-\frac{(\sum a)^2}{2\sum a^2+6\sum bc}\leq\frac{3}{8}$$

最后一步可转化为证：$\sum a^2\geq\sum bc$。 □

陈计说过与单墫同样的话：“一个好的学生应当自觉地减少那些不必要的过程，删去那些‘花枪’，‘一招破敌’。”（单墫, 2009, p. 9)陈计所有的解答都有这样的特点，但背后都有着浓郁的思想。

对于一元情况，反向柯西技术只适用于等号取在 x=1 的情况。

一个重要的局部不等式：

$$\frac{1}{1+x^2}=1-\frac{x^2}{1+x^2}\geq 1-\frac{x^2}{2x}=1-\frac{1}{2}x$$

对 x 可换元。

*.米尔黑德定理

（Muirhead Theorem）

$$\frac{1}{3}\sum x^4\geq\frac{1}{6}\sum x^3(y+z)\geq\frac{1}{3}\sum x^2y^2\geq\frac{1}{3}\sum x^2yz$$

越平均越小。幂次分布：4=4+0+0=3+1+0=2+2+0=2+1+1 。系数的分母表示项数，此处的系数使和式变为平均值。

此定理不能直接使用，在考试时需证明。此定理是证明四次以上不等式的利器，而对于三次不等式，可用 Schur 不等式，见下文。

略证：

$$\sum x^4\geq\sum x^2y^2$$

（由上文中的不等式

$$\sum x^2 \geq \sum yz$$

换元即得。）

$$\sum x^2y^2 \geq \sum x^2yz$$

（两遍乘 2，改写为

$$\sum x^2(y^2+z^2) \geq 2\sum x^2yz$$

$$\mathrm{RHS}-\mathrm{LHS}=\sum x^2(y^2+z^2-2yz)=\sum x^2(y-z)^2 \geq 0$$

）

$$\sum x^3(y+z) \geq 2\sum x^2y^2$$

（改写为

$$\sum yz(y^2+z^2) \geq 2\sum y^2z^2$$

显然）

$$2\sum x^4 \geq \sum x^3(y+z)$$

（

$$\sum (y^4+z^4) \geq \sum yz(y^2+z^2)$$

$$\mathrm{LHS}-\mathrm{RHS}=\sum (y-z)^2(y^2+yz+z^2) \geq 0$$

） □

**.柯西不等式延拓

使用赫尔德（Hölder）不等式后可得：

$$\sum x_iy_i \leq \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p,q>0.$$

$$\sum x_iy_iz_i \leq \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum z_i^r\right)^{\frac{1}{r}}, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1, p,q,r>0.$$

当$p=q=r=3$时，可得

$$\left(\sum x_iy_iz_i\right)^3 \leq \left(\sum x_i^3\right)\left(\sum y_i^3\right)\left(\sum z_i^3\right)$$

所谓“大柯西不等式”。

更一般地，

$$\left(\sum a_{1i}a_{2i}\dots a_{ni}\right)^n \leq \left(\sum a_{1i}^n\right)\left(\sum a_{2i}^n\right)\dots\left(\sum a_{ni}^n\right)$$

不能直接使用，需要简证。例如：

$$\prod(b^2+bc+c^2)=\frac{(b^2+bc+c^2)(\boldsymbol{bc+ca+ab})(c^2+ca+a^2)(b^2+ab+a^2)}{(\boldsymbol{bc+ca+ab})}$$
$$\geq\frac{\left(bc+\sqrt{c^3a}+\sqrt{ab^3}\right)^2\left(bc+\sqrt{a^3c}+\sqrt{a^3b}\right)^2}{bc+ca+ab}\geq\frac{(bc+ca+ab)^4}{bc+ca+ab}$$
$$=(bc+ca+ab)^3$$

3.算术-几何平均不等式

乘与加的故事（AM-GM）

二元形式：

$$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$$

n 元形式：

$$\frac{\sum x_i}{n}\geq\sqrt[n]{\prod x_i}$$

加权形式：

$$\frac{\sum\lambda_i x_i}{\sum\lambda_i}\geq\left(\prod x_i^{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{\sum\lambda_i}}$$

平均不等式家族：

$$\frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}\leq\sqrt[n]{\prod x_i}\leq\frac{\sum x_i}{n}\leq\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

均可加权。

Problem 5（6926）.求证：

$$x,y\in(0,1)\Longrightarrow x^y+y^x>1$$

证明：使用加权的 HM-GM 不等式：

$$x^y\cdot 1^{1-y}>\frac{y+1-y}{\frac{y}{x}+\frac{1-y}{1}}=\frac{x}{y+x-xy}$$

同理，

$$y^x\cdot 1^{1-x}>\frac{y}{y+x-xy}$$

故

$$x^y+y^x>\frac{x}{y+x-xy}+\frac{y}{y+x-xy}=1$$

□

Problem 6.

$$\sum a=4\Longrightarrow\sum a^2bc\leq 4(n=4)$$

证明：对称位置可以不妨假设大小关系

不妨设$ab+cd\leq bc+da$，则

$$64\sum a^2bc=64[ac(ab+cd)+bd(bc+da)]\leq 64(ac+bd)(bc+da)$$
$$\leq 16(ac+bd+bc+da)^2=16[(a+b)(c+d)]^2\leq(a+b+c+d)^4=64$$

□

但在安徽初赛没有用好这一点，来回顾一下这个题目。

Problem 7（安徽初赛，2017）.$x,y\in[0,1]$,求

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{1+xy}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{1-xy}{1+y^2}}$$

的取值范围。

证明：<u>当$x\geq y$时</u>，$\frac{1+xy}{1+x^2}$和$\frac{1-xy}{1+y^2}\in[0,1]$，故

$$2\geq f(x,y)\geq\frac{1+xy}{1+x^2}+\frac{1-xy}{1+y^2}\geq\frac{1+xy}{1+x^2}+\frac{1-xy}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}\geq 1$$

<u>当$x\leq y$时</u>，

$$f(x,y)\geq\sqrt{\frac{1+xy}{1+x^2}}\geq 1$$

由于对勾函数$x+\frac{1}{x}$在[0,1]上是单调递减的，故$x+\frac{1}{x}\geq y+\frac{1}{y}$.

$$1\leq f(x,y)=\sqrt{\frac{\frac{1}{x}+y}{\frac{1}{x}+x}}+\sqrt{\frac{\frac{1}{y}-x}{\frac{1}{y}+y}}=\sqrt{1+\frac{y-x}{\frac{1}{x}+x}}+\sqrt{1-\frac{x+y}{\frac{1}{y}+y}}$$

$$\leq\sqrt{1+\frac{y-x}{\frac{1}{y}+y}}+\sqrt{1-\frac{y-x}{\frac{1}{y}+y}}\xrightarrow[t=\frac{y-x}{\frac{1}{y}+y}\in[0,1]]{}\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\leq 2$$

$f(1,1)=1,f(0,0)=2,f(x,y)\in[1,2].$ □

关于这个解答的几点说明:

1.在第一种情形中，$\sqrt{x}\geq x$只在[0,1]内成立，见下图。

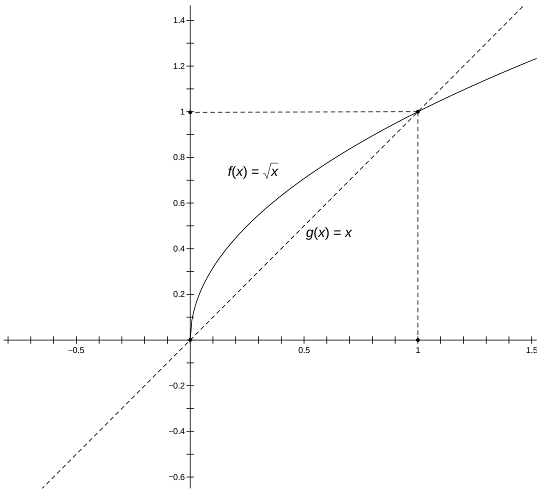


图 79 $f(x)=\sqrt{x}$与$g(x)=x$图像

2. $\sqrt{1-\frac{x+y}{\frac{1}{y}+y}}\leq\sqrt{1-\frac{y-x}{\frac{1}{y}+y}}$，这等价于证明$-x-y\leq-y+x\Leftrightarrow x+y\geq 0$，这是显然的。

3. $\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}$的图像如下图。可通过平方等价证明:

$$\sqrt{1-t^2}\leq 1$$

这是显然的。

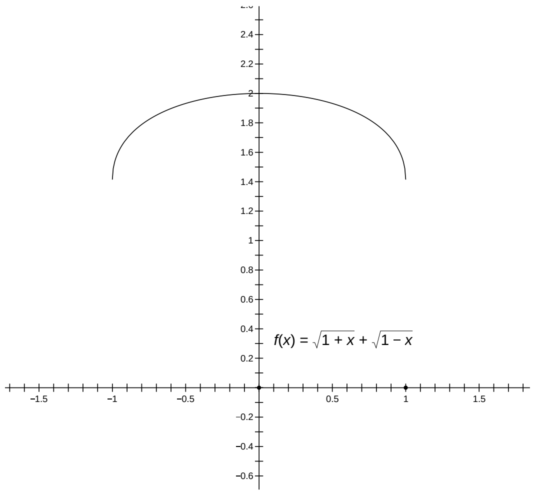


图 80 $f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$图像

4.这种解答的难度颇高，在整个过程中没有用到任何一个著名不等式，而一些部分的等价证明显然，但观察出来却一点也不显然。重视了对函数关系的考察。水平颇高，推测为很老的题目。

4.舒尔不等式

大小连手 中间对干（Schur）

由米尔黑德定理知：

$$\frac{1}{3}\sum x^3 \geq \frac{1}{6}\sum x^2(y+z) \geq xyz$$

对于不等式：

$$\lambda\left(\frac{1}{3}\sum x^3\right)+(1-\lambda)xyz \geq xyz$$

$$\lambda \geq \frac{1}{2}$$

当$\lambda=\frac{1}{2}$时，

$$\sum x^3+3xyz \geq \sum x^2(y+z)$$

$$\sum x^3-\sum x^2(y+z)+3xyz \geq 0$$

$$\sum x(x-y)(x-z) \geq 0$$

这都是 Schur 不等式。

简证：通过对最后一个形式的证明 不妨设$x=\min\{x,y,z\}$，各项均正。 □

推广：

$$\sum x^r(x-y)(x-z) \geq 0$$

对$r \geq 1$均是成立的。

特别地，$r=2$时，

$$\sum x^4-\sum x^3(y+z)+\sum x^2yz=\sum x^2(x-y)(x-z)=\sum(y-z)^2(y+z-x)\geq 0$$

$r=3$时,

$$\sum x^2(x-y)(x-z)=\sum x(x^2-y^2)(x^2-z^2)\geq 0$$

Problem 8（9971，全国联赛，2005）.对于正数$a,b,c,x,y,z>0$，满足

$$\begin{cases}cy+bz=a\\az+cx=b\\bx+ay=c\end{cases}$$

求证:

$$f(x,y,z)=\sum\frac{x^2}{1+x}\geq\frac{1}{2}$$

证明：从方程组解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0\\y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}>0\\z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0\end{cases}$$

（法一，暴解）换元

$$\begin{cases}u=b^2+c^2-a^2\\v=c^2+a^2-b^2\\w=a^2+b^2-c^2\end{cases}$$

此时,

$$x=\frac{u}{\sqrt{(w+u)(u+v)}}$$

那么,

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=\sum\frac{x^2}{1+x}&=\sum\frac{u^2}{(w+u)(u+v)+u\sqrt{(w+u)(u+v)}}\\&\geq\sum\frac{2u^2}{2(w+u)(u+v)+u(w+v+2u)}\\&\xrightarrow[u=\frac{1}{p},v=\frac{1}{q},w=\frac{1}{r}]{}\sum\frac{2qr}{2p^2+3p(q+r)+4qr}\end{aligned}$$

经暴解得，需证

$$14\sum p^3-9\sum p^2(q+r)+12pqr\geq 0$$

用 Schur 不等式后是显然的。 □

我们看到，这个不等式不是恰好的。所以巧解（多次放缩）的存在性是有的。

（法二，巧解，花老师，2017.8）

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=\sum\frac{x^2}{1+x}&=\sum\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)}\\&\geq\sum\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2+(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4\sum b^2c^2+2\sum a^4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

第一个不等号是 AM-GM 不等式；第二个不等号是 Cauchy 不等式，分母略去了若干负项。

此乃出自江西某暴力命题人（陶平生）之手，难度之大，让某一个省一个人都没做出来。后一种巧解是需要一定勇气的，因为放缩了两次。

但更有暴力之人，看，陈计的另一种证法：

（法三，更暴解）

$$f(x,y,z)=\sum\frac{x^2}{1+x}=\sum\frac{x^2}{1-x^2}(1-x)=\sum\frac{x^2}{1-x^2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$\geq\sum\frac{x^2}{1-x^2}\left[1-\frac{b^2+c^2-a^2}{4}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

□

陈计令人惊讶地构造出了一个恒等式！他自己也说这个在考场上不一定能想到。

5.幂平均单调性原理

$$M_p(x)=\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}},x_i>0(i=1,2,\ldots,n)$$

关于 p 是单调递增的。这就是幂平均单调性原理。

平均值不等式只是它的特例：

$$M_{-1}\leq M_0(G)\leq M_1\leq M_2$$

$$\frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}\leq\sqrt[n]{\prod x_i}\leq\frac{\sum x_i}{n}\leq\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

1957 年，人们在$M_0(G)\leq M_1$中间插入了一项，称为对数平均。当$n=2$时，

$$\sqrt{xy}<\frac{x-y}{\ln x-\ln y}=L<\frac{x+y}{2}$$

证明很容易，只需将其变为单变量问题即可。此处略。

1974 年，人们确定了对数平均的最优范围：

$$M_0(G)<L<M_{\frac{1}{3}}$$

广义的对数平均$L_p=\left[\frac{x^p-y^p}{p(x-y)}\right]^{\frac{1}{p-1}}$

表格 7 对数平均示例

L_i	L_2	L_1	L_0	L_{-1}
值	$\frac{x+y}{2}$	$\frac{1}{e}\left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}$	$\frac{x-y}{\ln x-\ln y}$	$\sqrt{xy}$

6.几何不等式

在上文中提到的 Klamkim 不等式，就是几何不等式。下面再看两个几何不等式。

三角形中的等周定理 i（下界）

令△为三角形的面积，我们有

$$\dots \geq M_2(a) \geq M_1(a) \geq \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle}$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立。
但这个不等式并不紧致，直到 1935 年波利亚(Polya)给出了最佳不等式：

$$M_0(a)(G) \geq \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle}$$

证明时应进行内切圆换元。并注意到海伦(Heron)公式

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}$$

证明此处略。

三角形中的等周定理 ii（上界）

$$a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$$

证明：使用正弦定理

$$\Leftrightarrow \sum \sin^2 A \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \sum \cos 2A \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 3+2\sum \cos 2A \geq 0$$

需要证的这个不等式有一个背景：

嵌入不等式：

$$x^2+y^2+z^2+2\sum yz\cos 2A \geq 0\text{，}\ x,y,z \in \mathbf{R}$$

证明：使用拉格朗日(Langarge)配方法

$$\Leftrightarrow (x+z\cos 2B+y\cos 2C)^2+(z\sin 2B-y\sin 2C)^2 \geq 0$$

显然成立。
嵌入不等式中令$x=y=z=1$，即是原式。 □

厄尔多斯-莫德尔(Erdös-Mordell,1935)不等式

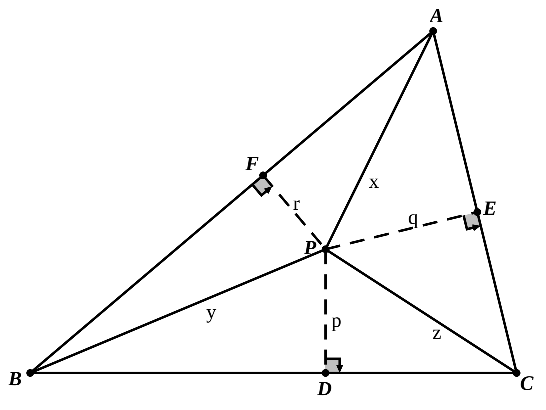


图 81 厄尔多斯-莫德尔不等式

$$x+y+z \geq 2(p+q+r)$$

P 为三角形内部任意一点。当且仅当$\triangle ABC$ 是正三角形，且 P 为中心时等号成立。
（法一，普通的证明）

因为$\angle DPE = 180° - \angle ACB = A+B$，所以

$$DE=\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos(A+B)}$$

$$=\sqrt{p^2\sin^2 B+p^2\cos^2 B+q^2\sin^2 A+q^2\cos^2 A-2pq(\cos A\cos B-\sin A\sin B)}$$

$$=\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2+(p\cos B-q\cos A)^2}\geq p\sin B+q\sin A$$

由我们前述 4.垂足三角形的内容知,

$$DE=CP\sin C$$

至此，可得

$$z=PC=\frac{DE}{\sin C}\geq\frac{p\sin B+q\sin A}{\sin C}$$

故

$$\sum x\geq\sum p\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)\geq\sum p$$

□

(严镇军, 2014, p. 119)。

下面是陈计的证明：（这个证明从未谋面）

作等角变换。在等角线上找 P'使 $AP'=AP=x$。

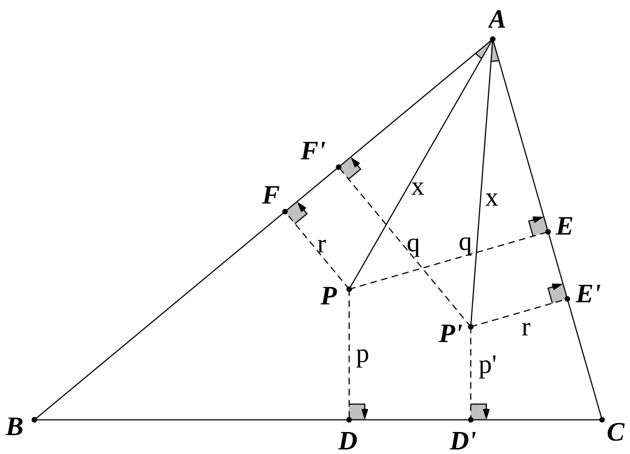


图 82 陈计之证

这种变换的神奇之处在于： q,r 皆未变!

$$(x+p')a\geq 2\triangle=p'a+rb+qc$$

$$\Rightarrow x\geq\frac{rb+qc}{a}$$

$$\Rightarrow\sum x\geq\sum p\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq 2\sum p$$

巧妙的构造证完了此题。(本证明严禁公开) □

7.闵可夫斯基不等式

专门调配乘积的事情（Minkwoski）

Minkwoski 不等式

$$M_p(x+y)\begin{pmatrix} p\geq 1 & \leq \\ p=1 & = \\ p\leq 1 & \geq \end{pmatrix}M_p(x)+M_p(y)$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\begin{pmatrix} p\geq 1 & \leq \\ p=1 & = \\ p\leq 1 & \geq \end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p\to 0$ 时,

$$\sqrt[n]{\prod(x_i+y_i)}\geq\sqrt[n]{\prod x_i}+\sqrt[n]{\prod y_i}$$

证明

$$\frac{RHS}{LHS}=\sqrt[n]{\prod\frac{x_i}{x_i+y_i}}+\sqrt[n]{\prod\frac{y_i}{x_i+y_i}}\leq\frac{1}{n}\sum\frac{x_i}{x_i+y_i}+\frac{1}{n}\sum\frac{y_i}{x_i+y_i}=1$$

□

当 p=-1 时,

$$\frac{1}{\sum\frac{1}{x_i+y_i}}\geq\frac{1}{\sum\frac{1}{x_i}}+\frac{1}{\sum\frac{1}{y_i}}$$

或（4339）

$$\sum\frac{x_iy_i}{x_i+y_i}\leq\frac{\sum x_i\sum y_i}{\sum x_i+\sum y_i}$$

证明　注意到

$$\sum\frac{1}{x_i+y_i}=\sum\frac{x_i}{(x_i+y_i)^2}+\sum\frac{y_i}{(x_i+y_i)^2}$$

而根据 Cauchy 不等式:

$$\left(\sum\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum\frac{x_i}{(x_i+y_i)^2}\right)\geq\left(\sum\frac{1}{x_i+y_i}\right)^2$$

故

$$\frac{1}{\sum\frac{1}{x_i+y_i}}\geq\frac{\left(\sum\frac{1}{x_i+y_i}\right)^2}{\sum\frac{1}{x_i}}+\frac{\left(\sum\frac{1}{x_i+y_i}\right)^2}{\sum\frac{1}{y_i}}$$

分子除过去即是要证的式子。

□

他还有另一个不等式:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}$$

这个不等式可用数形结合很好地证明:

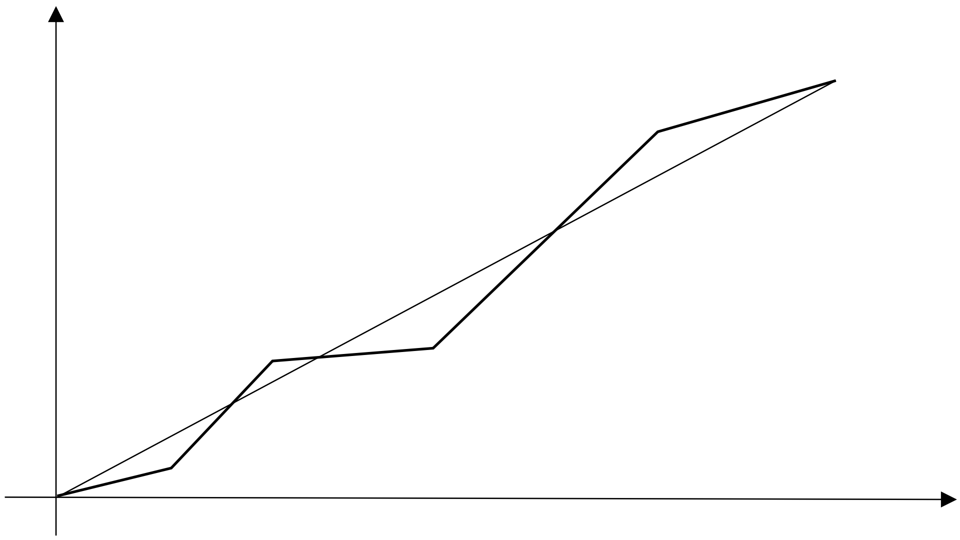


图 83 数形结合证明

(朱华伟、程汉波, 2016, p. 301)

8.切比雪夫不等式

打补丁的分离器（Chebyshev）

系列$\{x_i\}$和系列$\{y_i\}$若顺序

$$n\sum x_i y_i \geq \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

若逆序

$$n\sum x_i y_i \leq \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

这就是 Tchebychef 不等式。

Problem 9（0834）.求证：

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

证明：两边同取对数（此处取常用对数，只要底数大于 1）

$$\Leftarrow \sum a\ln a \geq \frac{1}{3}\left(\sum a\right)\left(\sum \ln a\right)$$

$\ln a$关于 a 是单调递增的。由 Tchebychef 不等式知其成立。

□

与 Tchebychef 不等式相关的还有排序不等式。此处略。

9.抽屉原则

证明不等式还可以用抽屉原理。

Problem 10（2970）.求证：

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ac)$$

证明：用抽屉原则 由于等号是在$a=b=c=1$时成立的，不妨设

$$(a^2-1)(b^2-1)\geq 0$$

（由抽屉原则知，三数中必有两数在 1 的同一侧）

$$LHS=(a^2b^2+2a^2+2b^2+4)(c^2+2)\geq 3(a^2+b^2+1)(1+1+c^2)\geq 3(a+b+c)^2$$
$$\geq 9(ab+bc+ac)$$

倒数第二个不等式用了 Cauchy 不等式；最后一个用到了上文中的

$$\sum x^2\geq \sum yz$$

□

上面说到的题目在这里。

Problem 11（5416）. $abc=1$，求证：

$$\sum\frac{1}{a(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

证明：（*走不到头的法一，齐次化*）陈计第一遍讲的时候用了齐次化，变成了 3 元 12 次不等式。然后希望用 Cauchy 不等式降次。

$$\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a(a+b)}\geq\frac{3}{2}\frac{1}{(abc)^{\frac{2}{3}}}\xrightarrow[a=x^3]{}\sum\frac{y^2z^2}{x(x^3+y^3)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\left[\sum\frac{y^2z^2}{x(x^3+y^3)}\right]\left[\sum x(x^3+y^3)\right]\geq\left(\sum yz\right)^2\geq ?\frac{3}{2}\sum x(x^3+y^3)$$

但这是错误的。

对于这样的情况，若想继续走下去，就要插入一个值λ，希望下面的不等式能够成功。

$$\left[\sum\frac{y^2z^2}{x(x^3+y^3)}\right]\left[\sum\lambda^2x(x^3+y^3)\right]\geq\left(\sum\lambda yz\right)^2\geq ?\frac{3}{2}\sum\lambda^2x(x^3+y^3)$$

$\lambda=x$ or y or z or …但前三个都失败了。

看来对于这样的题，用 齐次化-Cauchy 降次 走到黑可能只能撞墙了。

（*危险的法二，普通的换元*）换元如下：

$$a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)}=\sum\frac{y^2z}{zx^2+y^2x}\geq\frac{3}{2}$$

这是 3 元 9 次齐次式，有可能到 3 元 6 次。

$$\left(\sum\frac{y^2z}{zx^2+y^2x}\right)\left(\sum\lambda^2y^2z(zx^2+y^2x)\right)\geq\left(\sum\lambda yz\right)^2\geq ?\frac{3}{2}\sum\lambda^2y^2z(zx^2+y^2x)$$

由于陈计说了 3 元 6 次暴解是 IMO 水平，所以在联赛水平以内有些难了。并且此处还有一个不确定的λ。令人绝望。

（*令人惊讶的法三，创新的换元*）稍微换一下

$$a=\frac{x}{y},b=\frac{z}{x},c=\frac{y}{z}$$

仅仅换了b,c的位置，

$$\Leftrightarrow\sum\frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)}=\sum\frac{y^2}{x^2+yz}\geq\frac{3}{2}$$

就能用 AM-GM 了!

$$\Leftrightarrow \sum \frac{y^2}{x^2+yz} \geq \sum \frac{y^2}{x^2+\frac{y^2+z^2}{2}} = \sum \frac{2y^2}{2x^2+y^2+z^2}$$

并且换元后成了常见题（Cauchy 不等式的练习题）!

$$\sum \frac{2y^2}{2x^2+y^2+z^2} \xrightarrow{u=x^2,v=y^2,w=z^2} \sum \frac{2v}{2u+v+w} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum \frac{v}{2u+v+w}\right)\left(\sum v(2u+v+w)\right) \geq \left(\sum v\right)^2 \geq ? \frac{3}{4}\left(\sum v(2u+v+w)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum u^2 \geq \sum vw$$

这是显然的。 □

看来在陈计眼中一些令人惊讶的东西，在高中老师那里看起来都是套路吧，或许多加练习就有可能掌握。

10.恒等式

I.三元三次

$$\prod(a+b) = \sum a^2(b+c) + 2abc$$

$$\left(\sum a\right)\left(\sum ab\right) = \sum a^2(b+c) + 3abc = \prod(a+b) + abc$$

$$\left(\sum a\right)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2(b+c) + 6abc$$

$$\sum a^3 - 3abc = \frac{1}{2}\left(\sum a\right)\left[\sum (b-c)^2\right]$$

$$\sum a^3 - \sum a^2 b = \frac{1}{3}\sum(2a+b)(a-b)^2$$

$$\sum ab^2 - \sum a^2 b = \frac{1}{3}\sum(a-b)^3 = \prod(a-b)$$

3 次 Schur:

$$\sum a(a-b)(a-c) = \sum a^3 - \sum ab(a+b) + 3abc = \frac{1}{2}\sum(a+b-c)(a-b)^2 \geq 0$$

II.三元四次

$$(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2$$

$$(a+b+c)^4 = \sum a^4 + 6\sum a^2b^2 + 4\sum a^3(b+c) + 12\sum a^2bc$$

$$\sum ab(b+a)(b-a) = \sum ab(b^2-a^2) = \sum ab^3 - \sum a^3 b = \left(\sum a\right)\prod(a-b)$$

$$\left(\sum a^2\right)^2 - 2\sum a^4 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+b-a)$$

11.n 元式子

约定：$a_{n+1}=a_1$

1.

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2\geq 0\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}}$$

$$\boldsymbol{4\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}$$

$$\Leftarrow\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j\geq\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}+2\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}+\sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ j-i\geq 2}}a_ia_j$$

$$\geq 4\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}$$

最后一个不等式，是在不妨设$a_i(1\leq i\leq n)$是按照从小到大排列的，就能够看出来了。

2.

$$\boldsymbol{n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(a_i-a_j\right)^2\geq 0}$$

简证

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(a_i-a_j\right)^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j$$

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j$$

注意，

$$\sum_{\substack{sym\\ i\neq j,1\leq i,j\leq n}}a_ia_j=2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j$$

3.阿贝尔恒等式

$$\begin{aligned}a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\ &=a_1(b_1-b_2)+(a_1+a_2)(b_2-b_3)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(b_{n-1}-b_n)\\ &+(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n\end{aligned}$$

用和式写成：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=S_nb_n+\sum_{i=1}^{n-1}S_i(b_i-b_{i+1})$$

其中，S_i表示数列a_i的前 i 项和。

关于此式有一个面积证明法，便于记忆：

当$n=3$时，

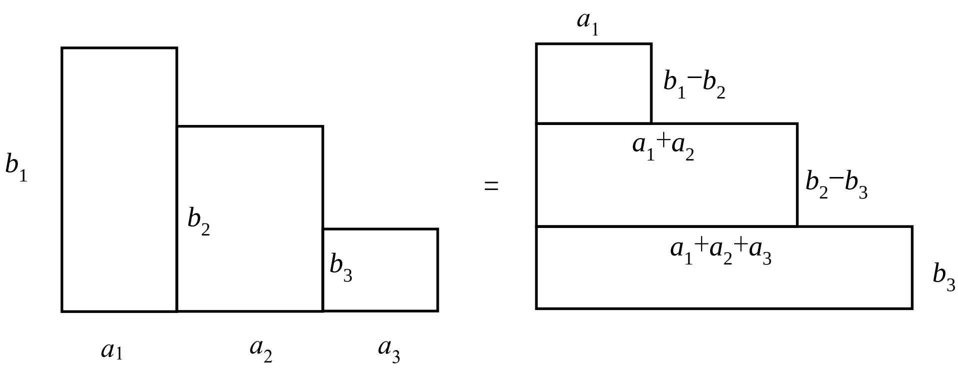


图 84 **用面积法证明阿贝尔恒等式**

(张景中、彭翕成, 2016, p. 222)

值得一提的是，在积分中，有一个阿贝尔变换：

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

它是由导数乘积式积分而来的：

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

引用作品

1. **《模拟试题精选》编委会, 2017.** *全国高中数学联赛模拟试题精选.* 第 1 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
2. **Anon., 无日期** *数学 必修 3.* 北京: 北京师范大学出版社.
3. **百度百科, 2016.** *百度百科-定比分点.* [联机] Available at: http://baike.baidu.com/link?url=61qvJOt3DzjBfPS-YVFRJOY8OabDE-4FAQugwv3mPmlucbLecOvN8-oLN7FXcfQK[访问日期: 2016].
4. **百度百科, 2016.** *百度百科-梅涅劳斯定理.* [联机] Available at: http://baike.baidu.com/link?url=UVhQBOwVDHv_2VzHL89MhMUBmmPFZj6FlElGMO6OGSMHUb1DkDoLmHFGQXyCga__S3h6GEo76zqXeuJfCyV4cK[访问日期: 2016].
5. **蔡晔, 2015.4.** *高考·奥赛对接辅导.* 第 8 版 编辑 北京: 机械工业出版社.
6. **单墫, 2009.** *解析几何的技巧.* 第 3 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
7. **单墫, 2015.** *平面几何 100 题.* 第 1 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
8. **范端喜、邓博文, 2012.** *平面几何.* 第 1 版 编辑 上海: 华东师范大学出版社.
9. **范端喜, 2013.** *自主招生数学考典.* 第 1 版 编辑 北京: 北京大学出版社.
10. **冯志刚, 2012.** *数列与数学归纳法.* 第 2 版 编辑 上海: 华东师范大学出版社.
11. **何天成, 2017.** *数学竞赛学习方法漫谈.* [联机] Available at: www.nsmath.cn
12. **柯召、孙琦, 2011.** *初等数论 100 例.* 第 2 版 编辑 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社.
13. **李尚志, 2014.** 多项式的基本运算. 出处: 严镇军, 编辑 *高中数学竞赛教程.* 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 246-254.
14. **李尚志, 2014.** 一元 n 次方程的根. 出处: 严镇军, 编辑 *高中数学竞赛教程.* 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 275-284.
15. **米汤屹觋 iR, 2014.** *"具象化"的意思?.* [联机] Available at: http://www.zybang.com/question/334d2ca81649bba7f3a0882fdb5eea43.html [访问日期: 2016].
16. **史济怀, 2014. 递归数列.** 出处: 严镇军, 编辑 *高中数学竞赛教程.* 安徽: 中国科学技术大学, pp. 219-230.
17. **史济怀, 2014.** 组合变换的互逆公式及其应用. 出处: 严镇军, 编辑 *高中数学竞赛教程.* 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 285-293.
18. **苏淳, 2014.** *从特殊性看问题.* 第 4 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
19. **苏淳, 2014.** *漫话数学归纳法.* 第 4 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
20. **肖果能, 2015.** *Fibonacci 数列.* 第 1 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
21. **严镇军, 2014.** 几何不等式(I). 出处: 严镇军, 编辑 *高中数学竞赛教程.* 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 115-121.
22. **余红兵, 2014.** 构造法解题(II). 出处: 严镇军, 编辑 *高中数学竞赛教程.* 安徽: 中国科学技术大学出版社, pp. 187-192.
23. **臧龙光, 2014.** *帮你学几何.* 第 2 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
24. **张景中、彭翕成, 2016.** *面积关系帮你解题.* 第 3 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.
25. **朱华伟、程汉波, 2016.** *函数与函数思想.* 第 1 版 编辑 安徽: 中国科学技术大学出版社.